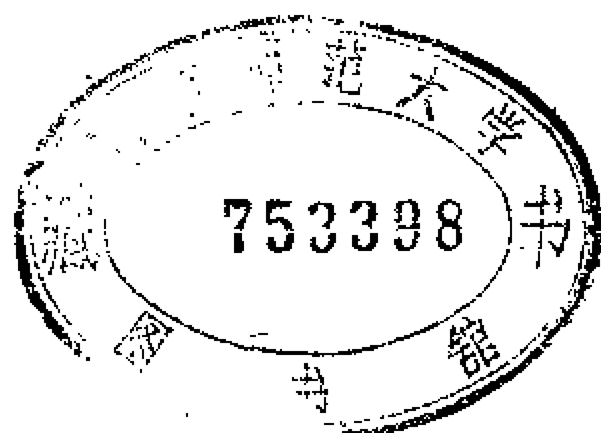
点集拓扑学基础

吴东兴 著



科学出版社

1981

内 容 简 介

本书为点集拓扑学方面的一本入门书，通俗易懂。本书可供高等院校数学系师生参考。

点集拓扑学基础

吴东兴 著

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

石家庄地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981 年 3 月第 一 版　　开本：787×1092 1/32

1981 年 3 月第一次印刷　　印张：5 1/4

印数，0001—8,500　　字数：117,000

统一书号：13031·1497

本社书号：2059·13—1

定价：0.85 元

序　言

恩格斯说"纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系"(«反杜林论»,第35页).因此,数学研究人类社会实践中出现的数与形．但是，同一百多年前恩格斯说这些话的时候相比，数与形的概念已经有了很大的变化．由于生产力的不断发展与人类认识能力的不断提高，数与形所包含的内容也不断地扩大．现代数学所研究的数与形是任一抽象集合的空间形式和数量关系．作为现代数学主要分支的拓扑学,主要是研究抽象集合的空间形式．因此，拓扑学是高度抽象地研究现实世界空间形式的学科．它的重要性是很明显的．

作为拓扑学的基础——点集拓扑学更是近代数学的基础．它对于近代数学的作用,如同欧氏几何学对于初等数学,解析几何学对于微积分．因此，学习与研究点集拓扑学对于学习与研究近代数学是必不可少的．

本书建立新的体系，试图使逻辑严格性与直观明显性结合起来．尤其注意从马克思主义认识论的角度进行阐述．但限于作者水平,不妥与错误之处恐怕不少,请读者批评指正！

本书承作者的老师方嘉琳同志仔细审阅全稿，提出不少宝贵意见,在此,谨致以深切的谢意！

吴东兴

1978年9月

目　　录

第一章　集合引论

§1　集合的概念

1.1.1　集合这个概念，是数学的基本概念之一，它是人们在长期社会实践中产生的。

人们在长期实践中，逐步认识到，往往必须把具有相同性质的对象的全体作为一个单一的对象来处理。例如，在农业生产中，往往把播种同一类种子的禾田作为一个单一的对象来考虑安排耕作措施；在工业生产中，往往把相同规格和同样精度的零件按同样的方式加工；学校教学，则往往把相同程度的学生编为一个班，安排一个课表。同样，在数学中，也往往需要把具有某种特殊性质的对象的全体当作一个单一的对象来加以考虑和处理。于是，就得到集合的概念。例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的全体构成一个集合；又如，自然数的全体也构成一个集合。

我们用大写字母 $A, B, \cdots$ 等表示集合，而用小写字母 $a, b, \cdots; x, y, \cdots$ 等表示构成集合的对象。构成一个集合的对象称为这个集合的元素。用记号

$$a \in A$$

表示对象 a 是集合 A 的一个元素，读作"a 属于 A"(注意 $\in$ 是希腊文"属于"一字 $\epsilon\sigma\tau\iota$ 的第一个字母)。例如，以 A 表示方程 $x^2-5x+6=0$ 的根所成的集合，则

$2 \in A$，因为 2 是 $x^2-5x+6=0$ 的根；

$3 \in A$，因为 3 是 $x^2-5x+6=0$ 的根。

因为 4 不是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根，所以 4 不是集合 A 的元素，记为

$$4 \notin A,$$

读作"4 不属于 A"。同样，以N表示自然数的全体所成的集合，则

$$1 \in N, 2 \in N, 3 \in N, 4 \in N, \cdots.$$

但是，$\frac{1}{2} \notin N$，因为$\frac{1}{2}$不是自然数；$\sqrt{2} \notin N$，因为 $\sqrt{2}$不是自然数。为了表示集合M是由具有性质 p 的对象构成的，并且是只由具有性质 p 的对象构成的，记为

$$M=\{x \mid x \text{ 有性质 } p\}$$

或

$$M=\{x : x \text{ 有性质 } p\}.$$

例如

$$A=\{x \mid x \text{ 满足 } x^2-5x+6=0\}$$

表示 A 是由方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的全体所成的集。又如

$$N=\{x \mid x \text{ 是自然数}\}$$

表示N是自然数全体所成的集。

一个集合的元素可以有无限多个，例如自然数集N；也可以有有限多个，例如集合

$$A=\{x \mid x \text{ 满足 } x^2-5x+6=0\},$$

它只有两个元素（数 2 和数 3），也可以只有一个元素，例如集合

$$C=\{x \mid x \text{ 满足 } 2x-6=0\},$$

它只有一个元素（数 3），称为单元素集；一个集合也可以不含有任何元素，例如集合

$$\{x \mid x \text{是满足方程 } x^2+1=0 \text{ 的实数}\},$$

这样的集合称为空集合，用记号 ϕ 表示.

如果一个集合的元素可以全部写出来，我们也可以将这个集合的元素全部写在花括弧内以表示这个集合. 例如集合

$$A=\{x \mid x \text{ 满足 } x^2-5x+6=0\}$$

也可记为

$$A=\{2,3\}.$$

同样，单元素集

$$C=\{x \mid x \text{ 满足} 2x-6=0\}$$

可记为

$$C=\{3\}.$$

但要注意，$\{0\}$表示由数 0 组成的单元素集，它与空集合 ϕ 是根本不同的.

1.1.2 一个集合M的部分元素所构成的集合N称为M的子集，记为

$$N\subset M (\text{或 } M\supset N).$$

读作N包含于M(或M包含N). 例如，上例中的集合 A, N 和 C 之间有关系

$$A\subset N, C\subseteq A.$$

又如，设 R 为有理数全体所成的集，则 $N\subset R$.

一般说来，要肯定 $N\subset M$，就必须证明N的每一个元素都是 M 的元素，也就是要证明"如果 $x\in N$，则 $x\in M$". 因此，对于任何一个集合M，必有 $M\subset M$. 即任一集合是它自己的子集. 此外，$N\subset M$ 也等于说"如果 $x\notin M$，则 $x\notin N$". 因此，$\phi\subset M$，即空集合是任何一个集合的子集. 如果两个集合M和 N 由相同的元素组成，这两个集合相等，记为 $M=N$. 要证明 $M=N$，就是要证明 $M\subset N$ 而且 $N\subset M$. 如果两个集合M和N的元素不完全相同，这两个集合不相等，记为 $M\neq N$. 例如

$$\{2,3\} \neq \{3\},$$

$$\{2\} \neq \{3\}.$$

如果 $N \subset M$，且 $N \neq M$，$N \neq \phi$，则 N 称为M的真子集.

§2 集合的运算

1.2.1 两个集合 A 和 B 的并集合，记为 $A \cup B$. 这个集合包含 A 与 B 中所有的元素，但不含有其他的元素. 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

例如 $A = \{1,2,3,4\}$，$B = \{3,4,5,6\}$，则

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

显然，$A \cup B = B \cup A$，$A \cup A = A$，$A \cup \phi = A$.
为了证明 $A \cup B = B \cup A$，我们只须证明

$$A \cup B \subset B \cup A \text{ 及 } B \cup A \subset A \cup B.$$

也就是证明命题"如果 $x \in A \cup B$，则 $x \in B \cup A$"以及命题"如果 $x \in B \cup A$，则 $x \in A \cup B$"同时成立.

1.2.2 两个集合 A 和 B 的交集合，记为 $A \cap B$，这个集合由 A 和 B 的共同元素组成，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 同时 } x \in B\}.$$

例如 $A = \{1,2,3,4\}$，$B = \{3,4,5,6\}$，则

$$A \cap B = \{3,4\}.$$

两个集合的交不是空集合，这两个集合就称为相交的. 如果两个集合的交是空集合，即这两个集合没有共同元素，则称为不相交的. 例如集合$\{1,2,3,4\}$与$\{5,6,7\}$不相交.

显然有 $A \cap A = A$，$A \cap \phi = \phi$.

1.2.3 同算术运算类似，可以定义差集. 对于任意两个集合 A 与 B，差集 $A - B$ 由 A 的那些不属于 B 的一切元素组成，即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

例如 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A-B=\{1,2\}.$$

又如 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6\}$，则

$$A-B=\{1,2,3\}.$$

可见 $A-B$ 是从 A 中除去 B 的元素后所余下来的元素所组成的集，因此 $A-B$ 又称为 B 对于 A 的余集，记为 C_AB，在省略 A 而不致于引起混乱时简记为 B^c。

1.2.4 集的运算和普通算术运算虽有不同之处，例如 $A\cup A=A$ 与 $A\cap A=A$ 在算术中是不成立的。但相似之处更引人注目。例如空集合的作用很像算术的 0。尤其是，我们可以证明下述常用的运算律成立。

定理 对于任意集合 A,B 及 C，下述运算律成立：

(1) 可换律 $A\cup B=B\cup A$,

$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(4) De Morgan 律 $C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$,

$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$.

证明 例如，我们来证明分配律的第二个集合恒等式

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

令

$$S=A\cap(B\cup C),\quad T=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

设 $x\in S$，则 $x\in A$ 并且 $x\in B\cup C$；如果 $x\in B$，则 $x\in A\cap B$；如果 $x\in C$，则 $x\in A\cap C$，总之 $x\in T$。这就证明了

$$S\subset T.$$

反之，设 $x\in T$，则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$. 如果 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$. 由 $x\in B$ 可知 $x\in B\cup C$. 又因 $x\in A$，所以 $x\in S$. 于是

$$T\subset S.$$

对于 $x\in A\cap C$，有相同的结果。由 $S\subset T$ 及 $T\subset S$，就得 $S=T$.

又如，我们来证 De Morgan 律的第一式

$$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B).$$

设 $x\in C-(A\cup B)$，则 $x\in C$，同时 $x\notin A$ 且 $x\notin B$. 故 $x\in C-A$ 且 $x\in C-B$，可见 $x\in(C-A)\cap(C-B)$. 反之，设 $x\in(C-A)\cap(C-B)$，则 $x\in C-A$ 且 $x\in C-B$，即 $x\in C$，同时 $x\notin A$ 且 $x\notin B$. 所以，$x\in C$ 同时 $x\notin A\cup B$，即 $x\in C-(A\cup B)$. 这就证明了左右两边的集合相等.

用同样的方法可证明定理的其余等式.]

1.2.5 为了定义任意多个集的并与交，先说明下标集的概念. 设 Λ 是任一个集合，如果对于 Λ 的每一个元素 λ，均有一个集合与之对应，与 λ 对应的集合记为 A_λ，则当 λ 跑遍集合 Λ 时，便同时得到一族集合，记为 $\mathscr{A}$，

$$\mathscr{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}.$$

集合 Λ 称为集族 $\mathscr{A}$ 的下标集.

如果 $\Gamma\subset\Lambda$，则集族

$$\mathscr{B}=\{A_\lambda:\lambda\in\Gamma\subset\Lambda\}$$

称为集族 $\mathscr{A}$ 的子族.

现在将集族 $\mathscr{A}$ 的并集 $\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 与交集 $\bigcap\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 定义如下：

$$\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\{a:\text{存在 }\lambda\in\Lambda\text{ 使 }a\in A_\lambda\},$$

$$\bigcap\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\{a:\text{对每个 }\lambda\in\Lambda, a\in A_\lambda\}.$$

注意并集与交集的另一种常用写法

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\},$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcap\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}.$$

特别地，当 $\Lambda=\{1,2,3,\cdots,n\}$时，

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n,$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n.$$

当 $\Lambda=\{1,2,3\cdots,n,\cdots\}$时，

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots,$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots.$$

例如，设 $\Lambda=\{1,2,3,\cdots\}$,

$$A_k=\{x:k-1<x\leqslant k\}=(k-1,k],$$

则并集

$$S=\bigcup_{k\in\Lambda} A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}(k-1,k]$$

是所有正实数的集合．如设

$$B_k=\left\{x:-\frac{1}{k}<x<\frac{1}{k}\right\}=\left(-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right),$$

则

$$P=\bigcap_{k\in\Lambda} B_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right)=\{0\}$$

是一个单元素集，只有一个元素 0。

设 Λ 是一个下标集．如果 $\Gamma\subset\Lambda$，则易证

(1) $\bigcup\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}\subset\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$,

(2) $\bigcap\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}\supset\bigcap\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$.

1.2.6 不难将 De Morgan 律推广到任意多个集合的情形.

设 $\mathscr{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$, X 是任一个集合, 则

(1) $X-\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\bigcap\{X-A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$.

(2) $X-\bigcap\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\bigcup\{X-A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$.

运用 1.1.2 所述关于证明两集合相等的基本方法, 容易证明(1)式与(2)式成立.

(1) 式与(2)式揭示了并集、交集与余集三者之间的深刻的联系. (1) 式左边是并的余, 右边是余的交; (2) 式左边是交的余, 右边是余的并. 运用(1)式与 (2) 式时只要记住"并余交"三个字,依顺序读即得并的余等于余的交, 依相反顺序读即得交的余等于余的并. 所以, 称 De Morgan 律为并余交公式更方便.

1.2.7 设 A, B 是两个集合. 称 $A\times B$ 为 A 与 B 的积集合,定义为

$$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}.$$

注意 $A\times B$ 未必等于 $B\times A$. 例如设

$$A=\{1,2,3\},\quad B=\{4,5\}$$

则

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\},$$

而

$$B\times A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1)(5,2),(5,3)\}.$$

显然 $A\times B\neq B\times A$. 如果用平面内的点来表示, $A\times B$ 的六个点与 $B\times A$ 的六个点完全不同.

积集合的概念进一步推广如下.

例如设 $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{5,6\}$, 则

$$A\times B\times C=\{(a,b,c):a\in A,b\in B,c\in C\}$$
$$=\{(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6)\}.$$

又以 E^1表示实数的集合，则

$$E^3=E^1\times E^1\times E^1=\{(x,y,z):x\in E^1,y\in E^1,z\in E^1\}$$

为平常欧氏三维空间的一切点的集合.

n 个集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ 的积集合定义为

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=$$

$$=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n):a_1\in A_1,\cdots,a_n\in A_n\}.$$

任意多个集合所成的集族

$$\mathscr{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$$

的积集合记为

$$\prod\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\text{或}\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda,$$

它由一切形如

$$a=\{a_\lambda:\lambda\in\Lambda,a_\lambda\in A_\lambda\}$$

的元素组成.

§3 关系与映射

1.3.1 本书所用的关系,都是二元关系.

定义 序对的集合称为关系.

设 A, B 是两个集合. $A\times B$ 的任一个子集合 σ 就是 A 与 B 之间的一种关系. 当且仅当$(x,y)\in\sigma$ 时,我们称 x 与 y 有关系 σ,记为

$$x\sigma y.$$

关系 σ 的定义域记为 D_σ，定义为

$$D_\sigma=\{x:\text{存在 } y,\text{使}(x,y)\in\sigma\}.$$

关系 σ 的值域记为 E_σ，定义为

$$E_\sigma=\{y:\text{存在 } x,\text{使}(x,y)\in\sigma\}.$$

关系 σ 的逆关系记为 σ^{-1}，定义为

$$\sigma^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in\sigma\}.$$

所以，$x\sigma y$ 当且仅当 $y\sigma^{-1}x$. σ 的值域是 σ^{-1} 的定义域，σ 的定义域是 σ^{-1} 的值域.

两关系 ρ 与 σ 的合成记为 $\rho\circ\sigma$，定义为

$$\rho\circ\sigma=\{(x,y):\text{存在 } z,\text{使 }(x,z)\in\sigma,(z,y)\in\rho\}.$$

集 X 上的恒等关系记为 Δ 或 $\Delta(X)$，定义为

$$\Delta(X)=\{(x,x):x\in X\}.$$

定理 设 $\rho\subset X\times Y,\sigma\subset Y\times Z$，则 $(\sigma\circ\rho)^{-1}=\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}$.

证明 $(z,x)\in(\sigma\circ\rho)^{-1}$ 等价于 $(x,z)\in\sigma\circ\rho$，根据合成的定义，等于说存在 $y\in Y$ 使 $(x,y)\in\rho,(y,z)\in\sigma$. 这又等于说 $(z,y)\in\sigma^{-1},(y,x)\in\rho^{-1}$，所以等价于 $(z,x)\in\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}$.】

1.3.2 当 $Y=X$ 时，X 与 Y 的关系 σ 称为在 X 上的关系.

在 X 上的关系 σ 称为自反的，当且仅当对于每个 $x\in X$，$x\sigma x$.

在 X 上的关系 σ 称为对称的，当且仅当 $x\sigma y$ 蕴涵 $y\sigma x$.

在 X 上的关系 σ 称为反对称的，当且仅当 $x\sigma y$ 及 $y\sigma x$ 蕴涵 $x=y$.

在 X 上的关系 σ 称为可递的(transitive)，当且仅当 $x\sigma y$ 及 $y\sigma z$ 蕴涵 $x\sigma z$.

定理 在集 X 上的关系 σ 是自反的当且仅当 $\Delta\subset\sigma$；是对称的当且仅当 $\sigma^{-1}=\sigma$；是可递的当且仅当 $\sigma\circ\sigma\subset\sigma$.

证明 前两句话是显然的. 只要证明第三句话. 设 σ 是

可递的，如果$(x, y)\in\sigma\circ\sigma$，则存在 $z\in X$，使 $(x, z)\in\sigma$ 且$(z, y)\in\sigma$，于是，由可递性，$(x, y)\in\sigma$。反之，如果 $\sigma\circ\sigma\subset\sigma$，且$(x, z)\in\sigma$，$(z, y)\in\sigma$，则$(x, y)\in\sigma$，故 σ 是可递的。]

1.3.3 设 σ 是在集 X 上的关系，如果 σ 同时是自反的，对称的，可递的，则 σ 称为在 X 上的等价关系.

设 σ 是在集 X 上的等价关系，则对于每个$x\in X$，存在不空集合$[x]$，

$$[x]=\{y: x\sigma y\}$$

称为 x 的等价类.

定理 如果 σ 是在集 X 上的等价关系，则对于任意 x，$y\in X$，或者$[x]\cap[y]=\phi$，或者$[x]=[y]$.

证明 假设$[x]\cap[y]\neq\phi$，于是存在 $z\in[x]\cap[y]$，由于 $z\in[x]$，$z\in[y]$，故 $x\sigma z$，$y\sigma z$。由对称性，$z\sigma y$。又由可递性，$x\sigma y$。故 $y\in[x]$。再由可递性，$[y]\subset[x]$。同理，$[x]\subset[y]$，所以$[x]=[y]$.]

集 X 关于等价关系 σ 的等价类的全体记为 X/σ，称为 X 模 σ 的商.

1.3.4 定义 如果序对的集合 f 满足条件：$(x, y)\in f$ 与$(x, z)\in f$ 蕴涵 $y=z$，则关系 f 称为映射(单值映射).

设 f 是映射，$(x, y)\in f$，记 y 为 $f(x)$，$f(x)$称为 x 的象或 f 在 x 的值。如果 f 的定义域为 X，f 的值域包含于 Y，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记为

$$f: X\to Y.$$

如果 $E\subset X$，则集

$$f(E)=\{y: \text{存在 } x\in E \text{ 使 } y=f(x)\}$$

称为 E 在 f 下的象。如果 $f(X)=Y$，则 f 称为满值的映射.

如果 $A\subset Y$，则集合

$$f^{-1}(A)=\{x:x\in X,\text{而}\ f(x)\in A\}$$

称为集合 $A\subset Y$ 在 f 下的原象．如果 $f^{-1}(Y)=X$，则 f 称为满义的映射．如不加声明，则通常所用的映射，都假定是满义的．

设 $f:X\to Y$ 是 X 到 Y 的映射，$A\subset X$，则 $f\cap(A\times Y)$ 仍为映射，简记此映射为 f_A 或 $f|A$，称为 f 的限制或收缩．f_A 的定义域是 A，且对于每个 $x\in A$，$f_A(x)=f(x)$．而 f 则称为 f_A 的扩张．因此，映射 f 是映射 g 的扩张，当且仅当 g 是 f 的限制．

设 $f:X\to Y$ 是从 X 到 Y 的映射，如果对于任意 $x_1, x_2\in Df$，$x_1\neq x_2$ 蕴涵 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则 f 称为一一的映射．如果映射 f 是一一的，则它的逆关系 f^{-1} 仍为映射，称为 f 的逆映射，其定义域为 $f(X)$．

1.3.5 关于映射，下述定理是基本的．证明方法如 1.1.2 所述，详细证明留给读者练习．

定理 设 $f:X\to Y$ 是从 X 到 Y 的映射．

$$\mathscr{E}=\{E_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$$

是 X 的任意子集族，即每个 $E_\lambda\subset X$，则

(1) $f(\bigcup\{E_\lambda:\lambda\in\Lambda\})=\bigcup\{f(E_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$，

(2) $f(\bigcap\{E_\lambda:\lambda\in\Lambda\})\subset\bigcap\{f(E_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$，

(3) $A\subset B$ 蕴涵 $f(A)\subset f(B)$，

(4) $f(A-B)\supset f(A)-f(B)$，

(5) $f(E)=\phi$ 当且仅当 $E=\phi$．

定理 设 $f:X\to Y$ 是从 X 到 Y 的映射．

$$\mathscr{S}=\{S_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$$

是 Y 的任意子集族，即每个 $S_\lambda\subset Y$，则

(a) $f^{-1}(\bigcup\{S_\lambda:\lambda\in\Lambda\})=\bigcup\{f^{-1}(S_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$，

(b) $f^{-1}(\bigcap\{S_\lambda:\lambda\in\Lambda\})=\bigcap\{f^{-1}(S_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$，

(c) $S \subset T$ 蕴涵 $f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T)$,

(d) $f^{-1}(S-T)=f^{-1}(S)-f^{-1}(T)$,

(e) $f^{-1}(S)=\phi$ 当且仅当 $S \cap f(X)=\phi$.

1.3.6 恒等关系 $\Delta(X)$ 是映射,常记为 i_X 或 i.

$$i: X \to X$$

称为恒等映射.它对于 X 的一切元素 x, $i(x)=x$.

如果映射 $f: X \to Y$ 对于每个 $x \in X$, $f(x)$ 等于 Y 的一个固定元素,则 f 称为常值映射.

设 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 是映射. 根据关系合成的定义, $g \circ f: X \to Z$ 是从 X 到 Z 的映射,它对于每个 $x \in X$, $g \circ f(x) = g(f(x))$. $g \circ f$ 有时简写为 gf. 根据 1.3.1,有

$$(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}.$$

§4 有 序 集

1.4.1 关系的概念是近代数学中最重要的基本概念之一. 如上节所述,映射不过是特殊的关系. 本节仍从关系出发,以得出拟序,半序,全序,有向集等概念以及有关的基本结果.

定义 设 σ 是集 X 上的关系,如果 σ 是可递的,则 σ 称为 X 上的拟序, 集 X 称为拟序集. 通常用记号 $\leqslant$ 表示拟序关系. 当且仅当 $(a, b) \in \leqslant$ 时, $a \leqslant b$. 但如果 $a \neq b$ 时,则简记为 $a < b$.

设 X 是拟序集, $A \subset X$, 如果存在一元素 $b \in X$, 使对于每个元素 $x \in A$, 恒有 $x \leqslant b$ ($x \geqslant b$), 则称 b 为集 A 的一个上界(下界).

设 X 是拟序集, 如果不存在异于 a 的元素 x, 使 $a < x$ ($x > a$),则元素 $a \in X$ 称为 X 的一个极大元(极小元).

设 X 是拟序集，如果 $A\subset X$，b 是 A 的一个极小上界（极大下界），则 b 称为 A 的一个上确界（下确界），记为 $b=\sup A$（$b=\inf A$）。注意，A 的上（下）确界不必是唯一的。

定理 如果 $\leqslant$ 是集 X 上的反对称拟序，则每个子集 $A\subset X$ 至多有一上确界及一下确界。

证明 设 $A\subset X$ 有两个上确界 a 及 b，则根据上确界的定义，$a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a$，但 $a\neq b$，因此 $\leqslant$ 不是反对称的。同理证只有一下确界。]

1.4.2 定义 拟序集 X 称为有界完备的，如果每一在 X 内有上（下）界的不空子集在 X 内有上（下）确界。拟序集 X 称为有限完备的，如果每一有限子集在 X 内均有上确界及下确界。

例如，实数系是有界完备的，而有理数系则不是。但有理数系是有限完备的。

定义 拟序集 L 称为拟序格，如果它满足下列两条格的公理：

[$L.1$] L 的每一有限子集在 L 内有唯一下确界；

[$L.2$] L 的每一有限子集在 L 内有唯一上确界。

由上述定义可知

定理 如果拟序集 L 是反对称的且有限完备的，则 L 是一拟序格。

1.4.3 现在给出本书以后常用的几个最重要的基本概念。

定义 反对称的拟序集称为半序集。

定义 半序集 X 称为全序的，当且仅当对于任意 x，$y\in X$，必有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$。

由定义可知，全序集的任意两个元素都是能比较顺序的。如果把全序集的元素按 $\leqslant$ 排列起来，恰成线状，因此，全

序集又称为线性序集或链．半序集主要由一些链组成．

定义 设 X 是一半序集，子集 $A\subset X$ 的元素 a 称为 A 的首元素，如果对于每个 $x\in A$，$a\leqslant x$．

定义 一个全序集，当且仅当它的每个不空子集均有首元素时，称为良序集．

定义 自反的拟序集 D 称为有向集，当且仅当对于任意两元 $m,n\in D$，存在元 $p\in D$，使 $m\leqslant p$，$n\leqslant p$．

有向集的概念，深刻地概括了自然数集及其任意无限子集的本质特性．一切自然数依 $\leqslant$ 排列所成的全序集记为 ω，则 ω 是一有向集．又设 E 为一任意集，以 $\exp E$ 表示集 E 的一切子集所成的集，$\exp E$ 称为 E 的幂集合．对于任意两元 $E_1,E_2\in\exp E$，如果 $(E_1,E_2)\in\leqslant$ 当且仅当 $E_1\subset E_2$，则 $\exp E$ 是一有向集．

§5 基　　数

1.5.1 定义 两集合 A 与 B 称为等势的，记为 $A\sim B$，当且仅当存在从 A 到 B 的一一的满值映射．

空集合，以及一切与形如 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的 n 个自然数的集合等势的集合称为有限集，其他的集合称为无限集．

定义 设 A,B 是两个集合，当且仅当 A 同 B 的子集等势时，$A\leqslant B$．

关系 $\leqslant$ 显然是自反的，可递的．下面证明它是反对称的 (Schröder-Bernstein 定理)．

定理 如果 $A\leqslant B$，$B\leqslant A$，则 $A\sim B$．

证明 由于 $A\leqslant B$，故存在从 A 到 B 的一一映射 f．又由于 $B\leqslant A$，故存在从 B 到 A 的一一映射 g．要证明存在从 A 到 B 的一一的满值映射．

不妨设 A 与 B 不相交。

元素 x 称为元素 y 的祖先，当且仅当轮流施行映射 f 及 g(或 g 及 f) 于 x 能得到 y。例如 x 是 $f(x)$，$g(f(x))$，$f(g(f(x)))$，…或 $g(x)$，$f(g(x))$，$g(f(g(x)))$，…的祖先。

把 A 分解为三个集：$A=A_E\cup A_O\cup A_I$。
A_E 由 A 中有偶数个祖先的元素组成，A_O 由 A 中有奇数个祖先的元素组成，A_I 由 A 中有无限个祖先的元素组成。同理将 B 分解为三个集：$B=B_O\cup B_E\cup B_I$。

注意 $f(A_E)=B_O$，$f(A_I)=B_I$，而 $g^{-1}(A_O)=B_E$。于是得到从 $A_E\cup A_O\cup A_I$ 到 $B_O\cup B_E\cup B_I$ 的一一的满值映射 h：$h_{A_E\cup A_I}$ 同 f 一样，h_{A_O} 同 g^{-1} 一样。]

1.5.2 定义 同自然数集{1,2,3,…}等势的集称为可数集。

由于可数集 A 与自然数集{1,2,3…}等势，故存在从{1,2,3,…}到 A 的一一的满值映射 f。以 a_1 表示 A 的元素 $f(1)$，以 a_2 表示 A 的元素 $f(2)$，…。于是，任一可数集的元素可依次用自然数作下标表示出来：$a_1, a_2, a_3\cdots$。a_n 是 n 的象。

定理 一切自然数对的集是可数的。

证明 设 $G=\{(m,n):m,n\in N\}$ 是自然数对的集合，N 是自然数的集合。根据 1.5.1 的定理，只要证明存在从 G 到 N 的一一的映射 f。令

$$f[(m,n)]=\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2}$$
$$+\frac{1+(-1)^{m+n}}{2}m+\frac{1+(-1)^{m+n-1}}{2}n.$$

不难验证，f 是一一的。]

推论 可数个可数集之并是一可数集.

证明 设$\{E_n:n\in N\}$的每个E_n是可数集. 又设

$$E_1=\{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots\}$$
$$E_2=\{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots\}$$
$$E_3=\{x_{31}, x_{32}, x_{33}, \cdots\}$$
$$\cdots\cdots,$$

显然$\bigcup\{E_n:n\in N\}$同集合$G=\{(m, n):m, n\in N\}$等势，既然$\{(m, n):m, n\in N\}$是可数集，$\bigcup\{E_n:n\in N\}$也是可数集.]

推论 一切有理数的集是可数集.

证明 对于任一自然数m，集合

$$R_m^+=\left\{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \cdots\right\}(m=1,2,3\cdots)$$

都是可数集. 集合

$$R_m^-=\left\{\frac{-1}{m}, \frac{-2}{m}, \frac{-3}{m}, \cdots\right\}(m=1,2,3,\cdots)$$

也是可数集. 有理数集R不过是下列可数个集合的并：

$$\{0\}, R_1^+, R_1^-, R_2^+, R_2^-, R_3^+, R_3^-, \cdots,$$

所以并集R也是可数集.]

定理 每一无限集含有一可数子集.

证明 设A是一无限集，它是不空的，故必然可选一点$a_1\in A$. $A-\{a_1\}$仍为无限，故可选一点$a_2\in A-\{a_1\}$. 集$A-\{a_1, a_2\}$仍为无限集，故可选一点$a_3\in A-\{a_1, a_2\}$. 继续下去，可得A的可数子集$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$.]

1.5.3 定理 无限集与它的一个真子集等势.

证明 设A是任一无限集，因它含有一可数子集. $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$. 令$A^*=A-\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$. 定义映射

$$f:A\to A-\{a_1\}$$

如下：对于$a\in A^*$，令$f(a)=a$；对于$a_n\in\{a_1, a_2, \cdots\}$，令

$f(a_n)=a_{n+1}(n=1,2,3\cdots)$. 显见 f 是一一的满值映射. 故 $A\sim A-\{a_1\}$. 并且 $A-\{a_1\}$是 A 的真子集.】

一个无限集,如果不是可数的,就称为不可数集.

定理 一切实数的集是不可数集.

证明 令 $f(x)=\text{tg}\dfrac{(2x-1)\pi}{2}$,则 $f(x)$是从(0,1)到一切实数的集的一一的满值映射. 故只要证(0,1)是不可数的. 为此,只要证任一从 N 到(0,1)的一一映射 f 必非满值. 设

$$f(1)=0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots,$$
$$f(2)=0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots,$$
$$f(3)=0.x_{31}x_{32}x_{33}\cdots,$$
$$\cdots\cdots.$$

今证存在一实数 $x\in(0,1)$,对于任意 n, $f(n)\neq x$. 实数 $x=0.x_1x_2x_3\cdots$构造如下:对于每个 k,取数码 $x_k\neq 0,9,x_{kk}(k=1,2,3\cdots)$. 于是得一实数 $0.x_1x_2x_3\cdots\in(0,1)$, 它不等于任一 $f(n)$,故 f 非满值.】

1.5.4 集合的等势关系是等价关系. 等势是集合的元素个数相等的数学抽象. 因此,对于等势的集合,说它们的基数相等. 以 $|A|$ 表示任一集合 A 的基数, 于是 $A\sim B$ 当且仅当 $|A|=|B|$. 对于有限集,一个集的基数也就是这个集所含元素的个数. 通常以 $\aleph_0$ 表示可数集的基数, 以 c 表示实数集的基数.

定义 $|A|\leqslant|B|$当且仅当 $A\leqslant B$.

于是, $\aleph_0<c,n<\aleph_0$. 对于任意无限集的基数 a, $\aleph_0\leqslant a$.

定理 对于任意集 X, $|\exp X|>|X|$.

证明 设 $f:X\to\exp X$ 是从 X 到 $\exp X$ 的任一映射. 我们来证,f 必非满值. 令

$$B=\{x: x\in X, x\notin f(x)\},$$

则 $B\in\exp X$，但 $B\notin Ef$。假设相反，$B\in Ef$，则存在 $b\in X$，使 $B=f(b)$。根据 B 的定义，$x\in B$ 当且仅当 $x\notin f(x)$。特别当 $x=b$ 时成立。于是 $b\in B$ 当且仅当 $b\notin f(b)$。但是 $f(b)=B$。所以得：$b\in B$ 当且仅当 $b\notin B$。矛盾。]

因此，不存在最大的基数。

设两个集合 A 与 B 不相交，且 $|A|=a$，$|B|=b$，定义 $a+b=|A\cup B|$。例如，$|\{1,3,5,\cdots\}|=\aleph_0$，$|\{2,4,6,\cdots\}|=\aleph_0$，得 $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$。又如，$|[0,1)|=c$，$|[1,2)|=c$，由于 $|[0,2)|=c$，所以得 $c+c=c$。

考虑一般的情形。对于任意多个基数

$$\{a_\lambda: \lambda\in\Lambda\}.$$

首先定义集族 $\{A_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$ 的和集合为

$$\sum\{A_\lambda: \lambda\in\Lambda\}=\{(\lambda, a): \lambda\in\Lambda, a\in A_\lambda\}.$$

如果 $|A_\lambda|=a_\lambda$，则定义

$$\sum\{a_\lambda: \lambda\in\Lambda\}=\left|\sum\{A_\lambda: \lambda\in\Lambda\}\right|.$$

设 $|A|=a$，$|B|=b$，则定义 $ab=|A\times B|$。

定理 (1) $\aleph_0\aleph_0=\aleph_0$；(2) $\aleph_0 c=c$；(3) $cc=c$。

证明 (1) 如 1.5.2 定理所证。

(2) 注意 $|N|=\aleph_0$，$|[0,1)|=c$，只要证 $|N\times[0,1)|=c$ 即可。因为

$$N\times[0,1)=\{(x, y): x\in N, y\in[0,1)\},$$

令 $f[(x, y)]=x+y$，则 f 是从 $N\times[0,1)$ 到 $[1,+\infty)$ 的一一的满值映射。因此 $|N\times[0,1)|=|[1,+\infty)|=c$。

(3) 根据积的定义，cc 是集合 $\{(x, y): x, y\in(0,1]\}$ 的基数。我们来证

$$\{(x, y): x, y\in(0,1]\}\sim(0,1].$$

将 x, y 表示为唯一的不尽小数，设

$$x=0.x_1x_2x_3\cdots,\quad y=0.y_1y_2y_3\cdots$$

则 $0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots\in(0,1]$. 令

$$f[(0.x_1x_2x_3\cdots,0.y_1y_2y_3\cdots)]=0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots,$$

则 f 是从 $\{(x,y):x,\ y\in(0,1]\}$ 到 $(0,1]$ 的一一满值映射．由于 $(0,1]$ 的基数为 c，所以 $cc=c$．▌

1.5.5 考虑集族 $\{A_\beta:\beta\in B\}$．设 B 的基数为 b，而每个 A_β 的基数都是 a，则定义 a^b 为

$$a^b=|\Pi\{A_\beta:\beta\in B\}|.$$

现在进一步考察 $\Pi\{A_\beta:\beta\in B\}$ 的元素．这个积集合的任一个元素 $\{a_\beta:\beta\in B,\ a_\beta\in A_\beta\}$ 相当于一个映射 f，

$$f:B\longrightarrow\Sigma\{A_\beta:\beta\in B\}.$$

对于每个 $\beta\in B$，$f(\beta)=a_\beta\in A_\beta$．一切这种映射的集合等势于积集合 $\Pi\{A_\beta:\beta\in B\}$．因此，$a^b$ 等于一切这种映射的集合的基数．现在证明

定理 设集合 A 的基数为 a，则集合 $\exp A$ 的基数为 2^a．

证明 一切映射 $f:A\longrightarrow\{0,1\}$ 所成的集合的基数为 2^a．因此，要证这些映射所成的集合等势于 $\exp A$．定义映射 g 如下：对于每个映射 f，命 $g(f)$ 为 A 的一个子集 $\{a:a\in A,\ f(a)=1\}$，则 g 是一一的，且 $Eg=\exp A$．▌

推论 对于任意基数 a，$2^a>a$．

定理 $2^{\aleph_0}=c$．

证明 根据定义，$2^{\aleph_0}$ 是从自然数集 N 到 $\{0,1\}$ 的一切映射的集合的基数．定义映射 g 如下：对于每个 f，命 $g(f)$ 为一二进小数，

$$g(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{2^n}.$$

显然，$Eg=[0,1]$．虽然 g 不是一一的，例如

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots=\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{0}{2^n}+\frac{0}{2^{n+1}}+\cdots,$$

但这样的数或是 1，或是$\frac{m}{2^n}$$(m=1,3,5,\cdots,n-1)$，

只有可数个．所以得

$$2\aleph_0=c+\aleph_0=c.\ ]$$

从这定理的结果自然会想到，是否存在大于 $\aleph_0$ 而小于 c 的基数．著名的连续统假设（[CH]）断言这样的基数不存在．对于任意无限基数 a，假设大于 a 而小于 2^a 的基数不存在，则称为广义连续统假设，简记为[GCH]．连续统假设首先由 Cantor 于 1878 年提出，直到 1938 年，Gödel 才证明了如果集合论无矛盾，则添加[GCH]后仍无矛盾（见[5]）．

§ 6 序型与序数

1.6.1 设 X,Y 是两个半序集．在 X,Y 上的半序关系分别为 $\leqslant_X,\leqslant_Y$．如果存在从 X 到 Y 的一一的满值映射 f，当且仅当 $x_1\leqslant_X x_2$ 时，$f(x_1)\leqslant_Y f(x_2)$，则称 X 和 Y 相似，记为 $X\simeq Y$，f 称为相似映射，两相似的半序集称为有相同序型．

显然，半序集的相似关系是等价关系．属于同一等价类的半序集有同一序型，因此有同一基数．但反之，等势的两集不必相似，例如

$$N=\{1,2,3,\cdots\}\text{及 }N^*=\{\cdots,3,2,1\}$$

就不相似．常以 ω 表示 N 的序型，以 ω^* 表示 N^* 的序型．以 η 表示有理数集依平常顺序排列的序型，以 λ 表示实数集依平常顺序排列的序型．

设 α,β 分别是 A,B 的序型，当且仅当 A 相似于 B 的子

集时，$\alpha \leqslant \beta$。易证$\leqslant$是在序型的集上的半序。

设 A_1, A_2 的序型分别是 α_1, α_2，定义 $\alpha_1 + \alpha_2$ 为和集 $A_1 + A_2$ 的序型。注意和集的定义如 1.5.4 所述，和集中的任意两个元素的关系定义为：$(1,a) \leqslant (2,b)$ 对于任意 $a \in A_1$ 及 $b \in A_2$ 成立；$(1,a) \leqslant (1,b)$ 当且仅当 $a \leqslant b$；$(2,a) \leqslant (2,b)$ 当且仅当 $a \leqslant b$。

设 A, B 的序型分别为 α, β。定义 $\alpha\beta$ 为积集 $B \times A$ 的序型，而在 $B \times A$ 上的半序为字典序，定义为：任意两元 $(b_1, a_1) \leqslant (b_2, a_2)$ 当且仅当 $b_1 < b_2$，或 $b_1 = b_2$ 而 $a_1 \leqslant a_2$。

1.6.2 良序集的序型称为序数。

易证，两个良序集的和集是良序集，两个良序集的积集（按字典序）是良序集。因此，序数的和与积有确定的意义。

设 X 是一个良序集，对于任意 $x \in X$，子集

$$X_x = \{y : y \in X \text{ 且 } y < x\}$$

称为元素 x 确定的初始段。

定理 设良序集 X 相似于它的一个子集 Y，f 是相似映射，则对于每个 $x \in X$，$x \leqslant f(x)$。

证明 设存在元素 x 使 $x > f(x)$。一切这些元素的集是良序集 X 的不空子集，故有一首元素，设为 x^*。如果 $f(x^*) = z$，则 $x^* > z$。由于 f 是相似映射，因而是一一的，故 $x^* > z$ 蕴涵 $f(x^*) > f(z)$，即 $z > f(z)$。但 $z < x^*$，这就同 x^* 是具有这种性质的元素的最小性相矛盾。】

推论 良序集不能同它的初始段相似，特别地，良序集的两个不同的初始段不相似。

证明 设良序集 X 相似于初始段 X_x，且 f 是相似映射，则 $f(x) \in X_x$，因而 $f(x) < x$，与定理矛盾。】

1.6.3 数学归纳法的根据是最小数原理。而最小数原理的抽象就是良序集的概念。对于良序集，存在同数学归纳

法类似的原理，称为超限归纳原理．

超限归纳原理　设 X 是一良序集，$E\subset X$，如果 $X_x\subset E$ 蕴涵 $x\in E$，则 $E=X$．

证明　设 $X\neq E$，则 $X-E$ 是 X 的不空子集，因而有一首元素 x．显然，初始段 X_x 的每个元素皆小于 x 而都属于 E，于是 $x\in E$．矛盾．]

应用超限归纳原理可证序数的≤是全序关系．

定理　设 α 及 β 是序数，则或者 $\alpha\leqslant\beta$，或者 $\beta\leqslant\alpha$．

证明　设 A 及 B 是良序集，序型分别为 α 及 β．如果 A 或 B 是空集，则定理显然成立．因此设 A 及 B 都不是空集．取 A 的首元素与 B 的首元素对应．设 $a\in A$ 而 A_a 的每个元素均对应于 B 的元素，如果 B 的元素均已对应完毕，则到此为止．如果 B 还有元素未同 A_a 的元素对应，则取这些元素的首元素同 a 对应．于是，根据超限归纳原理，或者 B 同 A 的某一初始段相似，此时 $\beta<\alpha$；或者 A 同 B 相似，此时 $\alpha=\beta$；或者 A 同 B 的某一初始段相似，此时 $\alpha<\beta$．]

推论　序数的集合是良序集．

证明　设 Φ 是一些序数的集合，但不是良序的，则存在一子集没有首元素．由于 Φ 是链，故必存在序数的无限链 $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\cdots$．设集合 A 的序数为 α_1，必存在初始段 A_{a_2}，A_{a_3}，A_{a_4}，$\cdots$，它们的序数分别为 α_2，α_3，α_4，$\cdots$．于是得出 A 的一个子集 $a_2>a_3>a_4>\cdots$，此子集没有首元素．矛盾．]

由于序数集是良序的，我们可以讨论序数集的初始段．以 W_α 表示小于序数 α 的一切序数的集合，则有

定理　每一序数 α 是集合 W_α 的序型．

证明　设 A 是序数为 α 的一个集．对于每个序数 $\beta<\alpha$，必有 A 的初始段 A_b，其序型为 β．反之，A 的每一元 b 确定的初始段 A_b 的序型为 $\beta<\alpha$．因此，存在从 W_α 到 A 的一一

的满值映射。此映射是相似映射，因为$\alpha_1\leqslant\alpha_2$蕴涵$A_{b_1}\subset A_{b_2}$，因而$b_1\leq b_2$. 反之亦然.]

对于每一个序数α，对应唯一的基数，就是W_α的基数，此基数称为序数α的基数。反之，对于每一基数a，一切以a为基数的序数的集合是一良序集，因而有唯一的最小序数，记为$\alpha(a)$，称为a的初始序数。例如ω是$\aleph_0$的初始序数。ω的重要性质是W_ω的每一初始段是一有限集。考虑一切基数为有限或可数的序数的集合。设这个良序集的序型为Ω，Ω便是第一个不可数序数。W_Ω是不可数的良序集，它的每一初始段是有限或可数的。

§ 7 Zorn 引理

1.7.1 对于有限集，我们总可以把它编成良序集。对于无限集，是否也能编成良序集？这就是策墨罗（E. Zermelo）良序定理所回答的问题。

良序定理 存在任一集上的良序关系。

为了证明良序定理，必然要引用其他的未知事实。我们可以证明，良序定理同下述选择公理和 Zorn 引理等价。

选择公理 设$\mathscr{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是不空集合的族，则存在映射$f:\Lambda\longrightarrow\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，使对于每个$\lambda\in\Lambda$，$f(\lambda)\in A_\lambda$. f称为集族$\mathscr{A}$的选择映射.

Zorn 引理 设S是一半序集，如果S的每个不空链都有上确界，则S至少有一极大元.

我们按如下程序证明它们的等价性：首先用良序定理证明选择公理；然后用选择公理证明 Zorn 引理；最后用Zorn引理证明良序定理。

1.7.2 用良序定理证明选择公理.

设

$$\mathscr{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$$

是不空集合的族，根据良序定理，存在集合

$$\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$$

上的良序．故每个不空子集 A_λ 必有首元素 $a_\lambda\in A_\lambda$．定义映射 f 为：对于每个 λ，令 $f(\lambda)=a_\lambda$，则 f 即为集族 $\mathscr{A}$ 的选择映射．]

1.7.3 用选择公理证明 Zorn 引理．

设 S 是半序集，它的每个不空链都有上确界，要证 S 至少有一极大元．用反证法，设 S 没有极大元，则对于 S 的每一个元 $x\in S$，存在 S 的不空子集合

$$A(x)=\{y:x<y\in S\}.$$

根据选择公理，存在不空集合族

$$\{A(x):x\in S\}$$

的选择映射 $f:S\longrightarrow\bigcup\{A(x):x\in S\}$，使 $f(x)\in A(x)$．显然有 $x<f(x)$．为了完成反证法，我们来证明，存在 S 的元素 x_0，使 $f(x_0)=x_0$．

取 S 的某一固定的元素 a，考虑满足下述三条件的 S 的不空子集 D：

(1) $a\in D$；

(2) $x\in D$ 蕴涵 $f(x)\in D$；

(3) D 的任一不空链的上确界属于 D．

显然，集 S 本身就是一个这样的子集 D．设一切这种不空子集 D 的族为 $\mathscr{D}$，取一切这些子集 D 的交，设为 A，

$$A=\bigcap_{D\in\mathscr{D}}D.$$

只要证明集 A 是链即可．因为如果 A 是链，则根据已知条件，A 有一上确界 x_0，根据(3)，$x_0\in A$，又由(2)，$f(x_0)\in A$，因

此 $f(x_0)=x_0$。否则 x_0 就不是上确界了。

为了证明 A 是链，首先证明 A 的任一元素 $x\geqslant a$。

令

$$D_1=\{x:x\geqslant a, x\in A\}.$$

显然，D_1满足条件(1)。如果 $x\in D_1$，则 $x\geqslant a$，而 $f(x)>x$，于是 $f(x)\geqslant a$，所以 $f(x)\in D_1$，D_1 满足条件(2)。如果 E 是D_1 的不空链，则 E 有一上确界 $y\geqslant a$。因为 $E\subset A$，$y\in A$，所以 $y\in D_1$，D_1 满足条件(3)，所以 $D_1\in\mathscr{D}$。因而 $A\subset D_1$，但 $D_1\subset A$，故 $D_1=A$。所以 A 的每个元素 $x\geqslant a$。

其次证明，A 的每个元素 x 具有性质 Q：

(Q) 如果 $y<x$，$y\in A$，则 $f(y)\leqslant x$。

考虑 A 的子集合 $D(x)$：

$$D(x)=\{y:y\in A, y\leqslant x \text{ 或 } y\geqslant f(x)\}.$$

我们证明，如果 x 具有性质 Q，则 $D(x)=A$。为此，只需证 $D(x)$满足条件(1)，(2)，(3)。由于 $x\geqslant a$，故 $a\in D(x)$，满足(1)。设 $y\in D(x)$，则可能有如下几种情形：

(a) 如果 $y<x$，则由于 x 具有性质 Q，故 $f(y)\leqslant x$。于是 $f(y)\in D(x)$。

(b) 如果 $y=x$，则 $f(x)=f(y)$，即 $f(x)\leqslant f(y)$，故 $f(y)\in D(x)$。

(c) 如果 $y\geqslant f(x)$，则 $f(y)>y\geqslant f(x)$，故 $f(y)\in D(x)$。于是，如果 $y\in D(x)$，则 $f(y)\in D(x)$，即 $D(x)$满足(2)。设 $E\subset D(x)$是不空链，则或者 E 的每个 $y\leqslant x$，此时E 的上确界 $b\leqslant x$，故 $b\in D(x)$；或者 E 中存在元素 $w\geqslant f(x)$，此时 E 的上确界 $b\geqslant f(x)$，故 $b\in D(x)$。所以 $D(x)$ 满足(3)。于是 $D(x)=A$。因此，如果 A 的元素 x 具有性质 Q，则对于每个 $z\in A$，必有 $z\leqslant x$ 或 $z\geqslant f(x)>x$。

最后，证明 A 的每个元素有性质 Q。设 D_2 为 A 中具有

性质 Q 的一切元素的集．今证 D_2 满足上述条件．(1),(2),(3)．由于 A 中不存在 $y<a$，故 a 具有性质 Q，D_2 满足(1)．如果 $x\in D_2$，则要证 $f(x)\in D_2$，由于 x 具有性质 Q，如果 $z<f(x)$，则 $z\leqslant x$．此时，如果 $z=x$，则 $f(z)=f(x)$．如果 $z<x$，则 $f(z)\leqslant x<f(x)$，所以 $f(x)$ 也有性质 Q，D_2 满足(2)．又设 $E\subset D_2$ 是不空链．$t=\sup E$．今证 t 有性质 Q．设 $z\in A$，$z<t$，则存在 $t_1\in E$ 使 $z<t_1<t$，由于 $t_1\in D_2$ 有性质 Q，$f(z)\leqslant t_1$，故 $f(z)<t$．因而 t 也有性质 Q，故 D_2 满足(3)．所以 $D_2=A$．这就完全证明了 A 是一链．▌

1.7.4 用 Zorn 引理证明良序定理．

设 S 是一个集合．S 的每个子集上的良序关系都是 $S\times S$ 的一个子集．以 $\mathscr{L}$ 表示 S 的每一个子集上的良序关系的族．作为 $S\times S$ 的子集族的 $\mathscr{L}$，可以根据包含关系定义半序 $\leqslant$，对于任意 $\sigma,\rho\in\mathscr{L}$，$\sigma\leqslant\rho$ 当且仅当 $\sigma\subset\rho$．对于半序集 $\mathscr{L}$，可以应用 Zorn 引理．由于 $\mathscr{L}$ 的任一链不过是一个个依次包含的 $S\times S$ 的一族子集．这族子集的并便是这族子集的上确界．因此，根据 Zorn 引理，我们断言，$\mathscr{L}$ 中至少有一极大元，设为 μ，则 μ 是 $S\times S$ 的一个子集．我们需证 μ 是集 S 上的全序关系．假设 μ 仅是 S 的真子集 $T\subset S$ 的全序关系，设 $g\in S-T$，则

$$\nu=\mu\cup\{(x,g):x\in T\}$$

是 S 的子集 $T\cup\{g\}$ 上的全序关系，而且

$$\mu\subset\nu,\ \mu\neq\nu.$$

这就同 μ 的极大性矛盾．▌

1.7.5 选择公理简记为[AC]．1938 年，Gödel 证明了，如果集合论无矛盾，则添加 [GCH] 与 [AC] 后仍无矛盾（见[5]）．因此，引用选择公理或其等价命题不会产生逻辑矛盾．

习 题

1. 证明：集合恒等式 $A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C$。

2. 证明：当且仅当 $B\subset A$ 时，$(A-B)\cup B=A$。

3. 证明：$X-\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(X-A_\lambda)$，

$$X-\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X-A_\lambda)。$$

4. 详述 1.3.5 定理之证明。

5. 证明：$A\cup(B-A)=A\cup B$。

6. 证明：$A-(A-B)=A\cap B$。

7. 证明：$A\cap(B-A)=\phi$。

8. 证明：$A-B=A-(A\cap B)$。

9. 证明：可数集与有限集之并是可数集。

10. 证明：平面内中心坐标为有理数且半径亦为有理数的圆有可数个。

11. 证明：$\alpha>\beta,\alpha=\beta$ 与 $\alpha<\beta$ 三者中没有两个同时成立。

12. 证明：两个良序集的和集是良序集，两良序集的积集按字典序是良序集。

13. 设 A 是任一无限集，证明 A 的一切有限子集所成集的基数等于 A 的基数。

14. 用 Zorn 引理证明，对于任意无限基数 $\aleph$：1) $\aleph+\aleph=\aleph$；2) $\aleph\aleph=\aleph$。

15. 证明：对于任意基数 a,b，或者 $a\leqslant b$；或者 $b\leqslant a$。

16. 设 a,b,c 是任意基数，证明：

    1) $a^b a^c=a^{b+c}$；

    2) $(a^b)^c=a^{bc}$；

    3) $a^c b^c=(ab)^c$。

17. 证明：$2\,\omega\neq\omega\,2$。

18. 证明 Zorn 引理等价于，设 S 是一半序集，如果 S 的每个不空链都有上界，则 S 至少有一极大元。

第二章 拓扑空间

§1 拓扑空间的概念

2.1.1 拓扑空间的概念是人类对现实空间的认识在不断深化发展的过程中逐步形成的．其理论根源有两个方面．一方面，由于数学分析的研究，提供了大量的具体材料，需要从更高的观点对这些具体材料加以抽象和概括．另一方面，由于对几何空间概念的研究，使人们从欧氏空间观念的束缚中解放了出来，人们试图用几何语言来表达数学分析的最基本的关系"极限"和"连续"，于是产生了邻域的概念．用邻域定义空间，便进一步形成了拓扑空间的概念．因此，拓扑空间的概念是高等几何与数学分析结合而形成的．这种情形，同初等几何与初等代数结合而产生解析几何学是很相似的．不过，拓扑学是在更高发展阶段上的产物．

直观地看来，一个点的邻域是指那些接近这个点的点的集合．因此，抽象地说来，一个点的邻域不过是包含此点的一个子集合．

定义 设 X 是任一个集合，而

$$\mathscr{T}=\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$$

是 X 的任一子集族，当且仅当

[T.1] $\bigcup\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=X$，

[T.2] 对于任意 $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$，如果 $x\in V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}$，则存在 $\lambda_3\in\Lambda$，使 $x\in V_{\lambda_3}\subset V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}$．

X 与 $\mathscr{T}$ 一起，组成一拓扑空间，记为 $(X,\mathscr{T})$，称为以 X 为

基集，以 $\mathscr{T}$ 为拓扑结构的拓扑空间．X 的元素称为此空间的点，$\mathscr{T}$ 的元素称为它所包含的每一点的基本邻域．

例 1　设 $S=\{a, b, c\}$，又设基本邻域族为

$$\mathscr{T}=\{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\},$$

则 $\mathscr{T}$ 满足定义的条件，因此，S 与 $\mathscr{T}$ 一起组成拓扑空间 $(S, \mathscr{T})$．

例 2　设 E^1 为直线上点的集合，基本邻域族为一切开线段 (a, b)（不包含端点 a 及 b 的线段）．则基本邻域族 $\mathscr{U}$ 显然满足定义的条件．因此 E^1 与 $\mathscr{U}$ 一起组成拓扑空间．这样的拓扑称为平常拓扑，是最常见的拓扑空间．为了方便，把 $\mathscr{U}$ 省略，简记此拓扑空间为 E^1．

例 3　设 E^2 为平面（欧氏）内一切点的集合，基本邻域族为一切开圆（即圆内一切点的集合，不包括圆周上的点），则基本邻域族 $\mathscr{U}$ 满足定义的条件．因此，E^2 与 $\mathscr{U}$ 一起组成拓扑空间．拓扑 $\mathscr{U}$ 称为平常拓扑．常将以 E^2 为基集的具有平常拓扑的拓扑空间 $(E^2, \mathscr{U})$ 简记为 E^2．

例 4　设 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 为一切自然数的集合，对于 N 的任一元素 k，取基本邻域

$$V_k=\{k, k+1, k+2, \cdots\},$$

则基本邻域族 $\mathscr{T}=\{V_k, k\in N\}$ 显然满足定义的条件．故 N 与 $\mathscr{T}$ 一起组成拓扑空间．

例 5　设 X 为任一集合，对于 X 的每一个元素 x，取单元素集 $\{x\}$ 作为基本邻域，基本邻域族 $\mathscr{D}=\{\{x\}: x\in X\}$ 显然满足定义的条件，因此 X 与 $\mathscr{D}$ 一起组成拓扑空间 $(X, \mathscr{D})$，拓扑 $\mathscr{D}$ 称为离散拓扑，$(X, \mathscr{D})$ 称为离散拓扑空间．

例 6　设 X 为任一集合，取 X 作为唯一的基本邻域，即基本邻域族 $\mathscr{T}$ 只有一个基本邻域 X．显然满足定义的条件，拓扑 $\mathscr{T}$ 称为不足道拓扑，具有不足道拓扑的空间 $(X,$

$\mathscr{T}$)称为不足道拓扑空间。

2.1.2 对于拓扑空间的定义，我们要注意如下几点。

首先，每一点至少有一不空的基本邻域。因为 $x \in \bigcup\{V_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$，故必存在 $\lambda \in \Lambda$，使 $x \in V_\lambda$。因此，条件[T,1]可改述为 X 的子集族 $\mathscr{T}$ 覆盖 X。

其次，任意两个基本邻域的交都是一些基本邻域的并。因为由定义，如果点 a 是基本邻域 V_{λ_1} 与 V_{λ_2} 的公共点，则 $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ 包含点 a 的一个基本邻域 V_{λ_3}。故 $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ 包含它的每一个点的一个基本邻域。$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ 恰好是这些基本邻域的并。因此，条件[T.2]可概述为：有限交是并。即

[T.2] 对于任意 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$，存在子集 $\Gamma \subset \Lambda$，使

$$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \bigcup\{V_\lambda : \lambda \in \Gamma \subset \Lambda\}.$$

第三，在任一集合上的拓扑是很多的。除了离散拓扑与不足道拓扑，我们很容易得到其他的拓扑。例如，设已知 X 的一个子集族 $\mathscr{T}$，也就是说，$\mathscr{T}$ 的每个成员都是 X 的一个子集。又如果属于 $\mathscr{T}$ 的一切子集的并等于 X。我们把属于 $\mathscr{T}$ 的一切子集的任意有限个子集的交集合添加到 $\mathscr{T}$ 上去，以得到扩大了的 X 的子集族 $\mathscr{T}'$。显然，$\mathscr{T}'$ 满足拓扑结构定义的条件。所以，X 与 $\mathscr{T}'$ 一起组成一个以 X 为基集，以 $\mathscr{T}'$ 为拓扑结构的拓扑空间$(X, \mathscr{T}')$。

既然在同一个集合 X 上的拓扑结构可能多种多样，于是就存在如何把它们加以比较的问题，本章第五节将回答这个问题。

在讨论问题时，只要不致于引起误会，我们可以把"以 X 为基集，拓扑为 $\mathscr{T}$ 的拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$"省略为"拓扑空间 X"。

§ 2 极限点、闭集、开集

2.2.1 现在，我们利用拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的拓扑结构$\mathscr{T}$来进一步研究空间中的一点a对于空间的子集A的位置关系。

定义 在拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中，一点a称为子集A的极限点，当且仅当点a的每一个基本邻域至少含有A的一个异于a的点。

从极限点的定义可知，如果点a是子集A的极限点，则点a的每一个基本邻域与子集$A-\{a\}$相交；反过来，如果点a的每个基本邻域与子集$A-\{a\}$相交，则点a是子集A的极限点。

例 1 设A是拓扑空间E^1的一开线段（即不含两端点的线段），则此开线段的两个端点，以及A的每一个点都是集A的极限点。

例 2 在拓扑空间E^1中，设

$$A=\left\{1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\},$$

则坐标原点是A的唯一的极限点。

例 3 设$S=\{a,b,c\}$，$\mathscr{T}=\{\{a\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$。在拓扑空间$(S,\mathscr{T})$中，子集$A=\{a,b\}$有两个极限点：$b$和$c$。而点$a$却不是$A$的极限点。

例 4 在不足道拓扑空间X中，设A是X的任一子集，则X的每一个点都是A的极限点。

例 5 在离散拓扑空间X中，任一子集A都没有极限点。

2.2.2 一个集合A的一切极限点所成的集合，用A'表

示，称为 A 的导集。

在拓扑空间 E^1 中，开区间

$$(a,b)=\{x:a<x<b\}$$

的导集是闭区间

$$[a,b]=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}.$$

在拓扑空间 E^1 中，集

$$A=\left\{1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots,\ \frac{1}{n},\cdots\right\}$$

的导集是单元素集

$$A'=\{0\}.$$

在不足道拓扑空间 X 中，任一子集 A 的导集都是 X，

$$A'=X.$$

在离散拓扑空间 X 中，任一子集 A 的导集都是空集，

$$A'=\phi.$$

2.2.3 一个集合 A 和它的导集 A' 的并集合

$$A\cup A'$$

称为集 A 的闭包，记为 $\bar{A}$ 或 A^-，即

$$\bar{A}=A\cup A'.$$

例如，在拓扑空间 E^1 中，(a,b) 的闭包是 $[a,b]$. 集 $A=\left\{1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots,\ \frac{1}{n},\cdots\right\}$ 的闭包是 $\bar{A}=\left\{0,1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots\right\}$. 又如，在不足道拓扑空间 X 中，任一子集 A 的闭包都是 X. 而在离散拓扑空间 X 中，任一子集 A 的闭包 $\bar{A}=A$.

从闭包的定义可知，一个集的闭包，是在这个集上添加这个集的一切极限点而得到的集合. 因此从一个集 A 到集 $\bar{A}$ 是一种施于集合上的运算，称为闭包运算. 常用记号 $\mathrm{cl}A$ 表示对 A 施行闭包运算所得的集合，即 $\mathrm{cl}A=\bar{A}$. 显然有 $\mathrm{cl}\phi=\phi$，$A\subset\mathrm{cl}A$.

2.2.4 对于闭包运算，有如下重要性质。

定理 设 A 是拓扑空间 X 的任一子集，则 $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$，即 $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A)=\mathrm{cl}A$。

证明 根据闭包的定义，$\bar{\bar{A}}=\bar{A}\cup\bar{A}'$。我们来证明 $\bar{A}'\subset\bar{A}$。为此，只需证明，如果 $x\notin\bar{A}$，则 $x\notin\bar{A}'$。如果 $x\notin\bar{A}=A\cup A'$，则 $x\notin A$ 同时 $x\notin A'$。必存在 x 的一个基本邻域 V_1 同 A 不相交，即 $V_1\cap A=\phi$。V_1 和 A' 也不会相交，因为如果 V_1 与 A' 有一个交点 $y(\neq x)$，则 y 便有一基本邻域 $V_2\subset V_1$，由于 y 是 A 的极限点，故 V_2 含有 A 的一个异于 y 的点 z。这样一来，V_1 就同 A 有一个交点 z 了，这是不可能的。因此，x 有一个基本邻域 V_1 既与 A 不相交也与 A' 不相交，也就是说，x 有一个邻域 V_1 与 $\bar{A}$ 不相交，$V_1\cap\bar{A}=\phi$。所以 $x\notin\bar{A}'$]。

2.2.5 **定理** 设 A, B 为拓扑空间 X 的子集，则有

(1) 如果 $A\subset B$，则 $\bar{A}\subset\bar{B}$；

(2) $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$；

(3) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$，即 $\mathrm{cl}(A\cup B)=\mathrm{cl}A\cup\mathrm{cl}B$。

证明 (1) 如果 $A\subset B$，则 $A'\subset B'$。因此，

$$\bar{A}=A\cup A'\subset B\cup B'=\bar{B}.$$

(2) 设 $x\in\overline{A\cap B}$，V 是 x 任一基本邻域，则

$$V\cap(A\cap B)\neq\phi.$$

于是，$V\cap A$ 和 $V\cap B$ 都是不空的。故 $x\in\bar{A}$，同时 $x\in\bar{B}$。因而 $x\in\bar{A}\cap\bar{B}$。所以

$$\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}.$$

(3) 显然，由(1)得 $\bar{A}\subset\overline{A\cup B}$，$\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$。故

$$\bar{A}\cup\bar{B}\subset\overline{A\cup B}.$$

反过来，设 $x\notin\bar{A}$，同时 $x\notin\bar{B}$，则 x 有基本邻域 V_1 及 V_2，使 $V_1\cap A=\phi$，$V_2\cap B=\phi$。故 x 有一基本邻域 $V_3\subset V_1\cap V_2$，使得

$$V_3 \cap (A \cup B)$$
$$= (V_3 \cap A) \cup (V_3 \cap B) \subset (V_1 \cap A) \cup (V_2 \cap B) = \phi,$$

因而 $x \notin \overline{A \cup B}$. 故得

$$\bar{A} \cup \bar{B} \supset \overline{A \cup B}.$$

所以 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. ▌

2.2.6 定义 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，当且仅当 $\bar{A} = A$ 时，A 称为闭集.

在闭集的定义中，由于 $\bar{A} = A \cup A'$，所以 $\bar{A} = A$ 就等于说 $A' \subset A$. 换言之，闭集是一个包含了它的一切极限点的集. 也就是说，在闭集之外，没有一个点是它的极限点. 显然，一个集的闭包是一个闭集.

定理 在任一拓扑空间 X 中，

(1) 任意多个闭集的交是闭集；

(2) 有限多个闭集的并是闭集；

(3) X 是闭集；

(4) 空集 ϕ 是闭集.

证明 (1) 设 $F = \cap\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是任意多个闭集的交，要证 F 是闭集. 设点 a 是 F 的一个极限点，于是 a 的任一基本邻域 V 包含有 $F - \{a\}$ 的点. 因为对于每个 $\lambda \in \Lambda$，$F \subset F_\lambda$，故对于每个 $\lambda \in \Lambda$，$F - \{a\} \subset F_\lambda - \{a\}$. 所以 a 的任一基本邻域和每个 $F_\lambda - \{a\}$ 相交. 故对于每个 $\lambda \in \Lambda$，a 是 F_λ 的极限点. 既然 F_λ 都是闭集，可知 $a \in F_\lambda (\lambda \in \Lambda)$，当然 $a \in F$. 这就证明了集 F 包含它的一切极限点，因而是闭的.

(2) 我们先来证明两个闭集的并 $F_1 \cup F_2$ 仍是闭集. 为此，只需证明，如果 $a \notin F_1 \cup F_2$，则 a 不是 $F_1 \cup F_2$ 的极限点. 由于 $a \notin F_1$，F_1 是闭集，故 a 不是 F_1 的极限点，故存在 a 的基本邻域 V_1 与 F_1 不相交. 同理，由于 $a \notin F_2$，F_2 是闭集，故存在 a 的基本邻域 V_2 与 F_2 不相交. 根据拓扑空间的

定义 存在 a 的基本邻域 V_3，

$$V_3 \subset V_1 \cap V_2.$$

故 V_3 与 $F_1 \cup F_2$ 不相交．可知 a 不是 $F_1 \cup F_2$ 的极限点，所以 $F_1 \cup F_2$ 是闭集．仿此容易推出有限个闭集的并 $F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ 仍是闭集．

(3) X 是整个拓扑空间，当然包含了它的一切极限点，因而是闭集．

(4) 在空集合之外，没有一个点是空集合的极限点，因而空集合包含了它的一切极限点，因而也是闭集．]

2.2.7 定义 在拓扑空间 X 中，子集 O 称为开集，当且仅当 O 的每一点都有一基本邻域完全含于 O．

由开集的定义推知：

(1) 拓扑空间的每一个基本邻域都是开集．如设 V_1 是点 x 的一个基本邻域，y 是 V_1 的任一点，则点 y 的一个基本邻域 V_2 与 V_1 有一公共点 y，故 $V_1 \cap V_2$ 完全包含点 y 的某一基本邻域 V_3，当然 V_3 完全含于 V_1．由于点 y 是 V_1 的任一点，所以 V_1 是一开集．

例如在拓扑空间 E^1 中，作为基本邻域的开区间是开集；在拓扑空间 E^2 中，作为基本邻域的开圆是开集；在离散拓扑空间 X 中，每一点都是开集；在不足道拓扑空间中，X 是开集．

(2) 拓扑空间的每一个开集都是一些基本邻域的并．反之，任意多个基本邻域的并是开集．

开集的定义表面上没有用到极限点的概念，好象与闭集的定义无关．其实，在开集与闭集之间，存在着非常本质的必然联系．

定理 拓扑空间的闭集 A 的余集 A^c 是开集．

证明 设 $b \in A^c$，即 $b \notin A$，由于 A 是闭集，b 不可能是 A

的极限点.故必有一基本邻域 V_1 与 A 不相交，于是 $V_1 \subset A^c$。所以，A^c 是开集。]

反之，我们有定理

定理 拓扑空间的任一开集 B 的余集 B^c 是闭集.

证明 设 $b \in B$，由开集的定义知点 b 有一基本邻域 $V_1 \subset B$，当然，V_1 不可能与 B^c 相交，因而点 b 不可能是 B^c 的极限点.所以 B^c 没有一个极限点在 B 中，也就是说，B^c 包含了它的一切极限点因而是一个闭集。]

根据上述定理，我们很容易从闭集的性质得出开集的性质。

定理 在拓扑空间 X 中，

(1) 任意多个开集的并是开集；

(2) 有限多个开集的交是开集；

(3) X 是开集；

(4) 空集 ϕ 是开集。

证明 (1) 设 $O = \bigcup\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$，每个 O_λ 都是开集. 由并余交公式得

$$X - O = X - \bigcup\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = \bigcap\{X - O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}.$$

右边是任意多个闭集的交，因而 $X - O$ 是闭集，故 O 是开集.

(2) 设 $O = \bigcap_{i=1}^{n} O_i$，每个 O_i 都是开集. 由并余交公式得

$$X - O = X - \bigcap_{i=1}^{n} O_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X - O_i).$$

右边是有限个闭集之并，故 $X - O$ 是闭集，因而 O 是开集。

(3) (4) X 的余集是 ϕ，ϕ 的余集是 X，所以 X 和 ϕ 都是开集.]

2.2.8 拓扑空间的拓扑结构同拓扑空间的开集族有着十分紧密的联系.

设 $\mathscr{T}$ 是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的拓扑结构. 由于 $\mathscr{T}$ 的每一个基本邻域都是开集,所以,如果在子集族 $\mathscr{T}$ 上添加一切可能的任意多个基本邻域的并,我们所得到的扩大了的子集族 τ 就是拓扑空间的开集族.

现在考虑拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的开集族 τ. 由于空间的每一点至少有一包含该点的开集(例如 X),同时任意两个开集的交仍是开集,所以,如取包含一点的开集作为该点的基本邻域(称为开邻域),则基本邻域族 τ 仍满足拓扑空间定义的条件,因而 τ 也是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的拓扑结构,基集 X 与开集族 τ 一起组成了一个拓扑空间 (X,τ). 那末,这样得到的拓扑空间(X,τ)与$(X,\mathscr{T})$是相异还是相同? 应当怎样看待它们? 由本章第 5 节的讨论,可知(X,τ)与$(X,\mathscr{T})$是本质相同的. 因此,我们可按如下方式重新定义拓扑空间.

定义 设 X 是一个集合,τ 是 X 的子集的族,属于 τ 的每一个子集称为开集,且满足下列条件:

[O.1] 有限个开集的交是开集;

[O.2] 任意多个开集的并是开集;

[O.3] X 和 ϕ 是开集,

则集合 X 与开集族 τ 一起组成一个拓扑空间,记为(X,τ),X 称为拓扑空间的基集,而 τ 称为拓扑结构.

又由于闭集的余集是开集,我们还可以用闭集或闭包重新定义拓扑空间(见[2],[4],[8],[11],[15]).

容易证明

定理 设 $\mathscr{F}=\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 的子集族,满足条件:

(1) 对任意子集 $\Gamma\subset\Lambda$, $\bigcap\{F_\lambda:\lambda\in\Gamma\}\in\mathscr{F}$;

(2) 对任意有限子集 $N\subset\Lambda$, $\bigcup\{F_\lambda:\lambda\in N\}\in\mathscr{F}$;

(3) $X, \phi \in \mathscr{F}$.

对每个 λ,令 $V_\lambda = X - F_\lambda$,则 $\mathscr{T} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$是 X 上的拓扑,且 $\bar{F}_\lambda = F_\lambda$。

定理 设 X 是一个集,映射 $c: \exp X \longrightarrow \exp X$ 满足条件:

(a) $c(\phi) = \phi$;

(b) $A \subset c(A)$;

(c) $c(c(A)) = c(A)$;

(d) $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$.

对于每个 $E \in \exp X$,定义 $V_E = X - c(X - E)$为基本邻域,则基本邻域族

$$\mathscr{T} = \{V_E : E \in \exp X\}$$

是 X 上的拓扑。且关于此拓扑,$\bar{A} = c(A)$。

§3 内点、外点、边界点

2.3.1 在拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 中,设 M 是一任意子集。借助拓扑结构 $\mathscr{T}$,可将 X 的点分为三种类型:

(1) 有一基本邻域完全含于集 M 的点,称为集 M 的内点。

(2) 有一基本邻域完全含于集 $X - M$ 的点,称为集 M 的外点。

(3) 每一基本邻域既与 M 相交又与 $X - M$ 相交的点,称为集 M 的边界点。

集 M 的一切内点所成的集称为集 M 的内域,以 M^i 表示 M 的内域;集 M 的一切外点所成的集称为集 M 的外域,以 M^e 表示 M 的外域;集 M 的一切边界点所成的集称为集 M 的边界,以 M^b 表示 M 的边界。

拓扑空间 X 的每个点，对于集 M 的位置关系，要么是 M 的内点，要么是 M 的外点，要么是 M 的边界点，三者必居其一，三者只居其一，因此

$$X=M^i\cup M^e\cup M^b.$$

2.3.2 定理 拓扑空间的任意集 M 的内域 M^i 是一个开集，而且是含于 M 的最大开集.

证明 设 $a\in M^i$. 需证 a 有一基本邻域完全含于 M^i. 由于 a 是 M 的内点，故 a 必有一基本邻域 $V_1\subset M$. 今证明 V_1 的每一点都是 M^i 的点，从而

$$V_1\subset M^i.$$

设 b 是 V_1 的任一点，对于 b 的任一基本邻域 V_2，存在 b 的一个基本邻域 $V_3\subset V_1\cap V_2$，即 $V_3\subset V_1$. 由于 $V_1\subset M$，故 $V_3\subset M$. 可知点 b 也是 M 的内点，即 $b\in M^i$. 所以，$V_1\subset M^i$. 故 M^i 是一个开集.

为了证明 M^i 的极大性，设 N 是含于 M 的开集，需证 $N\subset M^i$. 如果 $a\in N$，N 是开集，故 a 有一基本邻域 $V_1\subset N$，由于 $N\subset M$，因此 $V_1\subset M$. 所以点 a 是 M 的内点，这就证明了 $a\in M^i$. 既然 a 是 N 的任意一点，所以 $N\subset M^i$.]

2.3.3 定理 在拓扑空间中，任一集合 M 的外域 M^e 是一个开集.

证明 如果 $a\in M^e$，根据外点的定义，点 a 必有一基本邻域 V_1 与 M 不相交. 设 b 是 V_1 的任一点，对于 b 的任一基本邻域 V_2，因 $b\in V_1\cap V_2$，故必有 b 的一个基本邻域 $V_3\subset V_1\cap V_2$，即 $V_3\subset V_1$，因而 V_3 与 M 也不相交，所以 $b\in M^e$. 这就证明了 $V_1\subset M^e$. 故 M^e 是开集.]

2.3.4 定理 在拓扑空间中，任一集合 M 的边界 M^b 是一个闭集，且 $M^b=\overline{M}\cap\overline{(X-M)}$.

证明很容易.

§4 子 空 间

2.4.1 在平常的三维欧氏空间中，二维平面是它的一个子集合．在三维欧氏空间内研究的几何学是立体几何学．在二维欧氏平面内研究的几何学就是平面几何学．与此相似，我们也往往研究在一个拓扑空间内的一个子集合所成的拓扑空间．

定义 设 X 是一个拓扑空间，其拓扑为 $\mathscr{T}=\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$．又设 $Y\subset X$，对于每个 $\lambda\in\Lambda$，取 $Y\cap V_\lambda$ 为基本邻域，则基本邻域族

$$\tau=\{Y\cap V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$$

满足拓扑空间定义的条件．τ 称为 $\mathscr{T}$ 的子拓扑，又称为 Y 在 X 内的相对拓扑，或 $\mathscr{T}$ 在 Y 上的诱导拓扑．而 Y 则称为 X 的一个子空间．

例 1 设 E^2 为一切实数对的集合，它是关于平常拓扑的拓扑空间．又设

$$R=\{(x,0):x\text{ 是实数}\}$$

是 E^2 的一个子集合，取 E^2 的基本邻域与 R 的交为基本邻域，则这样的基本邻域族满足拓扑的定义，是 E^2 的拓扑的子拓扑．故 R 是 E^2 的子空间．

例 2 设 X 是任一不空集合，Y 是 X 的不空子集．则 X 上的离散拓扑诱导出 Y 上的离散拓扑，而 X 上的不足道拓扑诱导出 Y 上的不足道拓扑．

我们要特别注意，拓扑空间 X 的一个子集 Y，未必是 X 的子空间，只有当在 Y 上的拓扑结构与 X 的拓扑在 Y 上诱导的拓扑结构一样时，Y 才是 X 的子空间．我们来看下例．

例 3 设 $N=\{(a,b):a,b\text{ 是实数},b\geqslant0\}$．$N$ 是二维欧

氏平面的闭上半平面。又设

$$N^0=\{(a,b):a,b\text{ 是实数},b>0\}$$

如下地建立 N 上的拓扑结构．对于 $x=(a,b)\in N$，当 $b>0$ 时，取它的基本邻域为 $V_\lambda\cap N$，这里的 V_λ 是 E^2 的平常拓扑的基本邻域；当 $b=0$ 时，取它的基本邻域为 $(V_\lambda\cap N^0)\cup\{(a,b)\}$．容易验证，这样的基本邻域族满足拓扑结构的定义．但是，此拓扑却不是 E^2 的平常拓扑在 N 上的诱导拓扑．因而，关于所论的拓扑，N 不是 E^2 的子空间．

又，如果 X 是拓扑空间，Y 是 X 的一个子空间，则集合 $O\subset Y$ 开于 Y 与开于 X 不是一回事．例如 $X=E^1$ 是关于平常拓扑的拓扑空间．而

$$Y=[0,1]=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\},$$

则集合

$$\left(\frac{1}{2},1\right]=\left\{x:\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}$$

是 Y 的一个开子集．然而，$\left(\frac{1}{2},1\right]$ 却不开于 X，因为它不包含点 $x=1$ 在 X 内的基本邻域．

对于闭集，闭包，极限点等也有类似的情况．

2.4.2 下述定理，是判定子空间的开集的准则．

定理 设 X 是拓扑空间，Y 是 X 的子空间，则 O 开于 Y 当且仅当存在开于 X 的集 O_X，使 $O=O_X\cap Y$．

证明 设 $\mathscr{T}=\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 上的拓扑，而

$$\tau=\{V_\lambda\cap Y:\lambda\in\Lambda\}$$

是 $\mathscr{T}$ 在 Y 上的诱导拓扑．

设 $O=O_X\cap Y$，O_X 开于 X．如果 $x\in O$，则 $x\in O_X$．故 $\mathscr{T}$ 中存在一基本邻域 $V_1\subset O_X$．于是，

$$V_1\cap Y\subset O_X\cap Y=O$$

而 $V_1\cap Y$ 是 Y 内点 x 的一个基本邻域，故 O 开于 Y.

反过来，如果 O 开于 Y，则对于每一个点 $x\in O$，有 $\mathscr{T}$ 的一个基本邻域 V_λ，使得 $V_\lambda\cap Y\subset O$，令

$$O_X=\bigcup\{V_\lambda:V_\lambda\cap Y\subset O\},$$

则 O_X 开于 X。现在证明 $O=O_X\cap Y$。设 $y\in O\subset Y$，则存在 λ，使 $y\in V_\lambda\cap Y\subset O$，而 $V_\lambda\subset O_X$，所以 $y\in O_X\cap Y$。另一方面，设 $y\in O_X\cap Y$，则对于某个 λ，$y\in V_\lambda\cap Y\subset O$，故 $y\in O$。所以 $O=O_X\cap Y$.▌

§ 5　拓扑的比较

2.5.1　前面，我们曾多次提到过拓扑结构的相同与不同.究竟应当怎样去比较两个拓扑呢?

在拓扑学中，邻域的概念是用来定义极限点概念的．实际上是用几何直观的语言表达数学分析的最基本概念．在拓扑学中，极限点的概念是最本质的．拓扑结构不过是用来确定一个点是否为一个子集合的极限点的一种手段．我们理解了极限点的概念以后，拓扑学的其他概念也就容易理解了．因此，我们要比较两种拓扑结构，必须比较它们确定极限点的效果，才不致被现象所迷惑.

定义　设 X 是一个集合，$\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 是在 X 上的两个拓扑．如果对于每一点 $x\in X$ 的每一个属于 $\mathscr{T}_1$ 的基本邻域 V_1，存在 x 的属于 $\mathscr{T}_2$ 的基本邻域 V_2，使得 $V_2\subset V_1$，我们就说拓扑 $\mathscr{T}_2$ 比拓扑 $\mathscr{T}_1$ 较精或较强，或者说拓扑 $\mathscr{T}_1$ 比拓扑 $\mathscr{T}_2$ 较粗或较弱．记为 $\mathscr{T}_2\leqslant\mathscr{T}_1$.

例 1　设 X 是一任意集，它的每个元素只有一个基本邻域 X．这就是不足道的拓扑．它的拓扑结构是最粗的．X 的一切点都是它的任一子集的极限点.

例 2　设 X 是一任意集，它的每一元素 x 的基本邻域是 $\{x\}$。这是离散的拓扑结构。X 没有一个点是极限点。这是最精的拓扑结构。

例 3　设 $X=\{a,b,c\}$，$\mathscr{T}=\{\{a\},\{a,b,c\},\{a,c\}\}$。又设 $\mathscr{T}_1=\{\{a\},\{a,b,c\}\}$。$\mathscr{T}_2=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$。显然，$\mathscr{T}_1\geqslant\mathscr{T}$，$\mathscr{T}$ 比 $\mathscr{T}_1$ 较精。因为，一个点如在 $\mathscr{T}$，对某一子集为极限点，则在 $\mathscr{T}_1$，对同一子集仍为极限点。但是，反过来，对同一个子集，在 $\mathscr{T}_1$ 为极限点，在 $\mathscr{T}$ 未必为极限点。这是由于在 $\mathscr{T}$，点 c 有较精细邻域 $\{a,c\}$ 的缘故。

同理，$\mathscr{T}_1\geqslant\mathscr{T}_2$，因为在 $\mathscr{T}_2$，点 b 有较精细的邻域 $\{a,b\}$。

但是，$\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}_2$ 不能比较孰精孰粗。因为在 $\mathscr{T}$，c 点有更精细的邻域 $\{a,c\}$，但在 $\mathscr{T}_2$，点 b 则有更精细的邻域 $\{a,b\}$。在 $\mathscr{T}$，点 c 不是子集合 $\{b\}$ 的极限点，而在 $\mathscr{T}_2$，点 c 是子集合 $\{b\}$ 的极限点。但是，在 $\mathscr{T}$，点 b 是子集合 $\{c\}$ 的极限点，而在 $\mathscr{T}_2$，点 b 却不是 $\{c\}$ 的极限点。所以，既不能说 $\mathscr{T}\leqslant\mathscr{T}_2$，也不能说 $\mathscr{T}_2\leqslant\mathscr{T}$，$\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{T}_2$ 不能比较精粗。

当两拓扑能比较精粗时，较精的拓扑在每一点都具有较精细的基本邻域，但不在乎基本邻域的多寡。

例 4　设 $X=\{a,b,c\}$，$\mathscr{T}_3=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$。$\mathscr{T}_3$ 比在 X 上的任一拓扑都要精。

2.5.2　对于比较两拓扑结构孰精孰粗，下述定理十分重要。

定理　设 $\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$ 是在同一基集 X 上的拓扑结构，$\mathscr{T}_1=\{V_{\lambda_1}:\lambda_1\in\Lambda_1\}$，$\mathscr{T}_2=\{V_{\lambda_2}:\lambda_2\in\Lambda_2\}$，则 $\mathscr{T}_2\leqslant\mathscr{T}_1$ 当且仅当对于每个 $\lambda_1\in\Lambda_1$，存在子集 $\Gamma_{\lambda_1}\subset\Lambda_2$，使

$$V_{\lambda_1}=\bigcup\{V_{\lambda_2}:\lambda_2\in\Gamma_{\lambda_1}\subset\Lambda_2\}.$$

证明　充分性　由于对每个 λ_1 及每个 $x\in V_{\lambda_1}$，必存在

$\lambda_2\in\Gamma_{\lambda_1}\subset\Lambda_2$，使 $x\in V_{\lambda_2}\subset V_{\lambda_1}$。故 $\mathscr{T}_2\leqslant\mathscr{T}_1$。

必要性　对于每个 λ_1，定义 Γ_{λ_1} 为：$\lambda_2\in\Gamma_{\lambda_1}$ 当且仅当 $V_{\lambda_2}\subset V_{\lambda_1}$。故 $\bigcup\{V_{\lambda_2}:\lambda_2\in\Gamma_{\lambda_1}\}\subset V_{\lambda_1}$。反之，如果 $x\in V_{\lambda_1}$，由于 $\mathscr{T}_2\leqslant\mathscr{T}_1$，存在 $\lambda_2\in\Lambda_2$，使 $x\in V_{\lambda_2}\subset V_{\lambda_1}$。故 $x\in\bigcup\{V_{\lambda_2}:\lambda_2\in\Gamma_{\lambda_1}\subset\Lambda_2\}$。所以

$$V_{\lambda_1}=\bigcup\{V_{\lambda_2}:\lambda_2\in\Gamma_{\lambda_1}\subset\Lambda_2\}. \quad \rbrack$$

推论　设 $\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$ 是在 X 上的两个拓扑。$\mathscr{O}_1$ 是 $\mathscr{T}_1$ 的基本邻域的任意并生成的开集族，而 $\mathscr{O}_2$ 是 $\mathscr{T}_2$ 的任意并生成的开集族，则 $\mathscr{T}_2\leqslant\mathscr{T}_1$ 当且仅当 $\mathscr{O}_1\subset\mathscr{O}_2$。

证明　设 $\mathscr{T}_2\leqslant\mathscr{T}_1$，若 $O\in\mathscr{O}_1$，则 O 是 $\mathscr{T}_1$ 的元素之并，因而也是 $\mathscr{T}_2$ 的元素之并．故 $O\in\mathscr{O}_2$。于是 $\mathscr{O}_1\subset\mathscr{O}_2$。

反过来，设 $\mathscr{O}_1\subset\mathscr{O}_2$。故若 $V_1\in\mathscr{T}_1$，则 $V_1\in\mathscr{O}_2$，因而 V_1 是 $\mathscr{T}_2$ 的元素之并．所以 $\mathscr{T}_2\leqslant\mathscr{T}_1$。$\rbrack$

2.5.3　设 $\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$ 是在同一个集合 X 上的两个拓扑结构．根据上述定理，我们可区分以下四种情况．

(1) $\mathscr{T}_1$ 的每个元素都是 $\mathscr{T}_2$ 的一些元素之并．此时，$\mathscr{T}_1\geqslant\mathscr{T}_2$。

例如，设　$X=\{a,b,c\}$，

$\mathscr{T}_1=\{\{a\},\{a,b,c\}\}$，

$\mathscr{T}_2=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$，

则 $\mathscr{T}_1\geqslant\mathscr{T}_2$。

(2) $\mathscr{T}_2$ 的每个元素都是 $\mathscr{T}_1$ 的一些元素之并．此时，$\mathscr{T}_2\geqslant\mathscr{T}_1$。

例如，设　$X=\{a,b,c\}$，

$\mathscr{T}_1=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$，

$\mathscr{T}_2=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$，

则 $\mathscr{T}_2\geqslant\mathscr{T}_1$。

(3) $\mathscr{T}_1$ 有元素不能表示为 $\mathscr{T}_2$ 的元素之并，反之，$\mathscr{T}_2$

也有元素不能表示为$\mathscr{T}_1$的元素之并。此时，$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$不能比较孰精孰粗。

例如，设 $X=\{a, b, c\}$,

$$\mathscr{T}_1=\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\},$$

$$\mathscr{T}_2=\{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\},$$

易见$\mathscr{T}_1$中的$\{a, b\}$不是$\mathscr{T}_2$的元素之并。反之，$\mathscr{T}_2$中的$\{a, c\}$不是$\mathscr{T}_1$的元素之并。故$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$不能比较精粗。

(4) $\mathscr{T}_1$的每个元素都是$\mathscr{T}_2$的一些元素之并，反之，$\mathscr{T}_2$的每个元素都是$\mathscr{T}_1$的一些元素之并。于是，$\mathscr{T}_1 \geqslant \mathscr{T}_2$且$\mathscr{T}_2 \geqslant \mathscr{T}_1$。此时，称$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$等价，记为$\mathscr{T}_1 \sim \mathscr{T}_2$。

例如设在E^2上的拓扑结构$\mathscr{T}_1$为一切开圆域族。在E^2上的拓扑结构$\mathscr{T}_2$为一切开正方形域族。显然，$\mathscr{T}_1$的每个圆是$\mathscr{T}_2$的无限个开正方形的并。反之，$\mathscr{T}_2$的每个开正方形是$\mathscr{T}_1$的无限个开圆的并。所以$\mathscr{T}_1 \sim \mathscr{T}_2$。

又如2.2.8所述拓扑$\mathscr{T}$及拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的开集族τ，显见$\tau \geqslant \mathscr{T}$，因为每个开集都是$\mathscr{T}$的元素之并。反之，因$\mathscr{T} \subset \tau$，故$\mathscr{T}$的每个元素都是$\tau$的元素（一个）之并。因此$\mathscr{T} \geqslant \tau$。所以$\mathscr{T} \sim \tau$。

要特别注意，如果两拓扑结构$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$等价，则它们确定极限点的效果完全相同。因为设$A \subset X$，如关于拓扑结构$\mathscr{T}_1$，a是A的极限点，设V_2是属于$\mathscr{T}_2$的a的基本邻域，由于$\mathscr{T}_2 \geqslant \mathscr{T}_1$，故$V_2$必包含$a$的属于$\mathscr{T}_1$的基本邻域$V_1$。既然$V_1$与集$A-\{a\}$相交，当然$V_2$与$A-\{a\}$相交。所以，关于拓扑结构$\mathscr{T}_2$，$a$是$A$的极限点。同理，如果关于拓扑结构$\mathscr{T}_2$，$a$是$A$的极限点，则关于拓扑结构$\mathscr{T}_1$，$a$是$A$的极限点。因此，如果$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$等价，应当认为拓扑空间$(X, \mathscr{T}_1)$与$(X, \mathscr{T}_2)$是一样的。所以2.2.8所述的拓扑空间$(X, \mathscr{T})$与$(X, \tau)$应当看作是一样的。

2.5.4 现在考虑在集合 X 上的一切拓扑 $\mathscr{T}$ 所成的集合．以 $T(X)$ 记这个集合，即

$$T(X)=\{\mathscr{T}_\gamma:\gamma\in\Gamma\}.$$

如上所述，定义 $T(X)$ 上的关系 $\leqslant$ 为：$\mathscr{T}_1\leqslant\mathscr{T}_2$ 当且仅当 $\mathscr{T}_2$ 的每个基本邻域是 $\mathscr{T}_1$ 的一些基本邻域之并．$\mathscr{T}_1\sim\mathscr{T}_2$ 当且仅当 $\mathscr{T}_1\leqslant\mathscr{T}_2$ 且 $\mathscr{T}_2\leqslant\mathscr{T}_1$．$\sim$ 显然是等价关系．以 $\mathscr{T}^*_\gamma$ 表示 $\mathscr{T}_\gamma$ 所确定的等价类．考虑

$$T^*(X)=\{\mathscr{T}^*_\gamma:\gamma\in\Gamma\}.$$

设 $\mathscr{T}^*_1$, $\mathscr{T}^*_2\in T^*(X)$，定义 $\mathscr{T}^*_1\leqslant\mathscr{T}^*_2$，当且仅当存在 $\mathscr{T}_1\in\mathscr{T}^*_1$, $\mathscr{T}_2\in\mathscr{T}^*_2$, 且 $\mathscr{T}_1\leqslant\mathscr{T}_2$．则 $\leqslant$ 是 $T^*(X)$ 上的可递关系，反对称关系．因此，$T^*(X)$ 是反对称的拟序集．不难证明

定理 $T^*(X)$ 是一拟序格．

习　题

1．试以 $E^3=E^1\times E^1\times E^1$ 为基集，适当选取两等价的拓扑结构．

2．设 X 为一任意无限集，对于每一元素 $x\in X$，取包含 x 且其余集为有限的子集作为 x 的基本邻域．验证如此得到的基本邻域族 $\mathscr{T}$ 满足拓扑空间定义的条件．这样的拓扑结构 $\mathscr{T}$ 称为有限余拓扑．

3．证明：在拓扑空间中，如果 $A\subset B$，则 $A'\subset B'$．

4．证明，在拓扑空间中，$(A\cup B)'=A'\cup B'$．

5．证明，在拓扑空间中，任一集 A 的边界是一闭集，而且 $\bar{A}=A\cup A^b$．

6．证明：在拓扑空间中，

(1) $A^{bb}\subset A^b$；

(2) $(A\cup B)^b=A^b\cup B^b$；

(3) $\overline{A^b}\subset A^b$；

(4) $A^b=\bar{A}\cap\overline{A^c}$；

(5) $A^b=(A^c)^b$．

7．证明：如果 X 是拓扑空间，Y 是 X 的子空间，而且当且仅当 O

开于 X 时 O 开于 Y，则 Y 是 X 的开子集。

8．证明：设 X 是一拓扑空间，Y 是 X 的子空间，则当且仅当有 X 的某闭子集 C_X，使得 $C=C_X\cap Y$ 时，$C\subset Y$ 闭于 Y。

9．设 E^1 为直线上点的集合．定义基本邻域族为：

$$\mathscr{S}=\{[a,b):a<b,a,b \text{ 为实数}\},$$

则 $(E^1,\mathscr{S})$ 是拓扑空间．称为 Sorgenfrey 直线。

10．设 $\mathscr{T}_1$、$\mathscr{T}_2$ 是在 X 上的拓扑，$\mathscr{F}_1$、$\mathscr{F}_2$ 分别是 $\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$ 所生成的闭集族。证明 $\mathscr{T}_2\leqslant\mathscr{T}_1$ 当且仅当 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$

11．证明 2.2.8 的定理。

12．设 E^1 为直线上点的集合，定义基本邻域族为：

$$\mathscr{R}=\{(a,+\infty):a \text{ 为任意实数}\}.$$

证明 $(E^1,\mathscr{R})$ 是拓扑空间。$\mathscr{R}$ 称为右手拓扑。

同样讨论左手拓扑

$$\mathscr{L}=\{(-\infty,a):a \text{ 为任意实数}\}.$$

13．设 X 是一全序集，在 X 上的关系 $<$ 为不自反的，即对于任意 $x\in X$，$x<x$ 不成立。定义基本邻域为：$\{x:x<a,a\in X\}$；$\{x:x>b,b\in X\}$；$\{x:b<x<a,a,b\in X\}$。证明基本邻域族 $\mathscr{T}$ 满足拓扑条件，$\mathscr{T}$ 称为在 X 上的序拓扑。

14．试证明：$T^*(X)$ 是一拟序格。

第三章 连续映射

§1 连续映射

3.1.1 正如映射是函数的推广一样，连续映射不过是连续函数的推广．我们知道，连续函数不改变极限关系，与此类似，连续映射也尽可能地保持拓扑空间的极限关系．

定义 设 X 是拓扑空间，在 X 上的拓扑是 $\mathscr{T}$；Y 是拓扑空间，在 Y 上的拓扑是 $\mathscr{T}'$．

$$f: X \longrightarrow Y$$

为一映射．x 为 X 的一点，如果对于 $f(x)$ 在 $\mathscr{T}'$ 的每一基本邻域 V，存在 x 在 $\mathscr{T}$ 的基本邻域 U，使得 $f(U) \subset V$，则映射 f 在点 x 为连续．如果 f 在 X 的每一点连续，则 f 称为连续映射．

例 1 恒等映射 $i: X \longrightarrow X$ 是连续的．

例 2 常值映射 $c: X \longrightarrow Y$ 是连续的．

为了判定一映射是连续的，常常利用下述定理．

定理 设 X 及 Y 为拓扑空间，$f: X \longrightarrow Y$ 为一映射，下述命题等价：

(1) f 是连续的；

(2) 对于每一开集 $O \subset Y$，$f^{-1}(O)$ 开于 X；

(3) 对于每一闭集 $C \subset Y$，$f^{-1}(C)$ 闭于 X；

(4) $A \subset X$ 蕴涵 $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$．

证明 (1)⇒(2)（⇒表示推出）设 $x \in f^{-1}(O)$，因而 $f(x) \in O$．由于 O 是开集，它包含 $f(x)$ 的一个基本邻域．根据连

续的定义，存在 x 的一个基本邻域 V，使得 $f(V)\subset O$，所以 $V\subset f^{-1}(O)$。因而 $f^{-1}(O)$ 是一开集。

(2)⇒(3) 设 $O=Y-C$，故 O 是 Y 的开集，根据(2)，知 $f^{-1}(O)$ 是 X 的开集，故

$$X-f^{-1}(O)=[f^{-1}(O)]^c=f^{-1}(O^c)=f^{-1}(C)$$

是闭集。

(3) ⇒ (4) 显然，$A\subset f^{-1}[f(A)]\subset f^{-1}[\overline{f(A)}]$。由于 $\overline{f(A)}$ 是闭集，故由 (3) 可知 $f^{-1}[\overline{f(A)}]$ 也是闭集，因而 $\bar{A}\subset f^{-1}[\overline{f(A)}]$。所以 $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$。

(4)⇒(1) 设 $x\in X$，而 U 是 $f(x)$ 在 Y 中的一个基本邻域，U 是包含 $f(x)$ 的开集。设 $V=[\overline{f^{-1}(U^c)}]^c$，由于 $f(x)\in U$，$f(x)\notin U^c$，$x\notin f^{-1}(U^c)$，故 $x\in V$。我们只需证 $f^{-1}(U^c)$ 是闭的，这样就证明了 V 是开集，而

$$f(V)=f([f^{-1}(U^c)]^c)=f(f^{-1}(U))\subset U.$$

因而就证明了存在 x 的一个基本邻域被 f 映射为 U 的子集。现在来证明 $f^{-1}(U^c)$ 是闭集。因为

$$f^{-1}(U^c)\subset\overline{f^{-1}(U^c)},$$

根据(4)，

$$f(\overline{f^{-1}(U^c)})\subset\overline{f(f^{-1}(U^c))}\subset\overline{U^c}=U^c.$$

由此得

$$\overline{f^{-1}(U^c)}\subset f^{-1}(U^c),$$

所以

$$\overline{f^{-1}(U^c)}=f^{-1}(U^c).$$

因而 $f^{-1}(U^c)$ 是闭集。]

3.1.2 拓扑空间有很多重要的性质，经过连续映射后保持不变。也就是说，如果

$$f:X\longrightarrow Y$$

是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的满值的连续映射，X 具有

性质 p,则 Y 也具有性质 p.

例如，设 f 是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的一一的连续映射，又 $A\subset X$ 而 $x\in A'$,则 $f(x)\in[f(A)]'$.

证明 设 U 是 $f(x)$ 的任一基本邻域，则根据连续映射的定义，存在 x 的一个基本邻域 V，使得 $f(V)\subset U$. 由于 $x\in A'$,故存在 $y\neq x, y\in V$ 且 $y\in A$. 因而 $f(y)\in f(V)\subset U$. 又由于 f 是一一的，$f(y)\neq f(x)$,所以，$f(x)$的每一个基本邻域 U 包含一点 $f(y)\neq f(x), f(y)\in f(A)$. 因此，$f(x)\in f(A)'$.]

3.1.3 由于连续映射的性质，使得我们有可能从已知拓扑构造新的拓扑. 如果我们有一个集合 X 和一个拓扑空间 Y,而 f 映射 X 入 Y,则利用 Y 的拓扑，我们可以得到在 X 上的拓扑，这是第一种. 第二种，如果我们有一个拓扑空间 X 和一个集合 Y，而 f 是从 X 到 Y 的满映射，则利用 X 的拓扑，我们可以得到在 Y 上的拓扑.

定理 设 f 是从集合 X 到拓扑空间 Y 的映射，$\mathscr{T}$ 为 Y 上的拓扑. 则在 X 上存在最粗的拓扑，记为 $f^{-1}(\mathscr{T})$，使 f 成为连续映射，拓扑 $f^{-1}(\mathscr{T})$称为拓扑 $\mathscr{T}$ 的逆拓扑.

证明 存在 X 上的拓扑，使 f 成为连续映射. 例如在 X 上的离散拓扑，它使 Y 的任一开集 O 的原像 $f^{-1}(O)$ 是开集，因而使 f 连续. 但是，离散拓扑却是使 f 为连续的最精的拓扑. 今取 Y 的一切基本邻域 U 的原像 $V=f^{-1}(U)$ 作为 X 的基本邻域. 显然，这样得到的基本邻域的族是在 X 上的拓扑，此拓扑是使 f 为连续的最粗拓扑.]

此定理可推广如下：

定理 设 $\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是一族映射，都把集合 X 映入拓扑空间 Y,则在 X 上存在最粗的拓扑，使每个 f_λ 为连续.

证明 设 $\mathscr{T}$ 是 Y 上的拓扑结构，

$$\mathscr{T}=\{V_\gamma:\gamma\in\Gamma\}.$$

对于任意有限个下标 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\in\Lambda$ 及 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r\in\Gamma$，取 X 的子集

$$f_{\lambda_1}^{-1}(V_{\gamma_1})\cap f_{\lambda_2}^{-1}(V_{\gamma_2})\cap\cdots\cap f_{\lambda_r}^{-1}(V_{\gamma_r})$$

作为基本邻域．不难验证，这样得到的基本邻域族是在 X 上的拓扑，而且是使每一个 f_λ 均为连续的最粗的拓扑．】

我们注意，在 Y 上的拓扑的逆拓扑 $f^{-1}(\mathscr{T})$ 除了使从 X 到 Y 的映射 f 连续外，还有如下重要性质．

(1) 设 O 是 X 的开集，则 $f(O)$ 是 $f(X)$ 的开集．因为根据拓扑 $f^{-1}(\mathscr{T})$ 的基本邻域的取法，开集 O 是 $\mathscr{T}$ 的若干个基本邻域的原象的并，因而是 $\mathscr{T}$ 的若干个基本邻域之并 Q 的原象．所以，$f(O)=Q\cap f(X)$，即 $f(O)$ 开于 $f(X)$．

如果 X 和 Y 是拓扑空间，而 f 是从 X 到 Y 的映射，使开集之象仍为开集，则 f 称为开映射．因此，逆拓扑 $f^{-1}(\mathscr{T})$ 使 f 成为从 X 到 $f(X)$ 的开映射．

(2) 设 C 是 X 的闭集，则 $f(C)$ 是 $f(X)$ 的闭集．因为 C^c 是开集，故在 Y 中存在开子集 Q，使得 $C^c=f^{-1}(Q)$，即 $C=f^{-1}(Q^c)$，故 $f(C)=Q^c\cap f(X)$，因而 $f(C)$ 闭于 $f(X)$．

如果 X 和 Y 是拓扑空间，而 f 是从 X 到 Y 的映射，使闭集之象仍为闭集，则 f 称为闭映射．因此，逆拓扑 $f^{-1}(\mathscr{T})$ 使 f 成为从 X 到 $f(X)$ 的闭映射．

3.1.4 定理 设 f 是从拓扑空间 X 到集合 Y 的映射，$\mathscr{T}$ 为在 X 上的拓扑．则在 Y 上存在使 f 为连续的最精的拓扑，记为 $f(\mathscr{T})$，称为商拓扑．

证明 存在集合 Y 上的拓扑，使得 f 成为连续映射，例如不足道的拓扑．但不足道拓扑只是使 f 为连续的最粗的拓扑．如果 f 关于 Y 上的某一拓扑为连续，则 f 关于每一

个比它粗的拓扑也都为连续．那么，是否存在使 f 为连续的在 Y 上的最精的拓扑？Y 的一个子集 U，当且仅当它的原象是 X 上拓扑 $\mathscr{T}$ 的开集 V 时，即 $f^{-1}(U)=V$，U 是 Y 的一个基本邻域．如此得到的基本邻域族显然是在 Y 上的拓扑，它使 f 成为连续映射，并且是使 f 连续的最精的拓扑．]

§2 同胚映射

3.2.1 在同一个集合 X 上的两个拓扑 $\mathscr{T}_1$ 及 $\mathscr{T}_2$，当它们确定极限点的效果完全相同时，称它们为拓扑等价，记为 $\mathscr{T}_1\sim\mathscr{T}_2$．如 2.5.4 所述，此时 $\mathscr{T}_1\leqslant\mathscr{T}_2$，$\mathscr{T}_2\leqslant\mathscr{T}_1$．现在把这种情形略为推广一下，设在集合 X 上的拓扑为 $\mathscr{T}_1$，而在集合 Y 上的拓扑为 $\mathscr{T}_2$．那末，在什么条件下，$(X,\mathscr{T}_1)$ 与 $(Y,\mathscr{T}_2)$ 可以认为本质上相同呢？要解决这一问题，就需要结合前面学过的概念．

首先，空间 X 的点与 Y 的点要能够一一对应起来，以 f 表示这一对应法则，则 f 是从 X 到 Y 的一一的满值映射．设 U 是 Y 的一个子集，当且仅当 $f^{-1}(U)$ 为 X 的开集时，取 U 为 Y 的一个基本邻域，如此便得到在 Y 上的拓扑 $f(\mathscr{T}_1)$（$\mathscr{T}_1$ 的商拓扑）．显然，关于拓扑 $\mathscr{T}_1$ 的空间 X 与关于商拓扑 $f(\mathscr{T}_1)$ 的空间 Y 可以看作是本质上相同的．

其次，如果在 Y 上的拓扑 $\mathscr{T}_2$ 与在 Y 上的商拓扑 $f(\mathscr{T}_1)$ 等价，我们便应当认为在映射 f 下，关于拓扑 $\mathscr{T}_1$ 的空间 X 与关于拓扑 $\mathscr{T}_2$ 的空间 Y 本质上是相同的．但是，$f(\mathscr{T}_1)$ 与 $\mathscr{T}_2$ 等价意味着什么呢？一方面，如果 V 是 $\mathscr{T}_2$ 的一个基本邻域，则 V 是 $f(\mathscr{T}_1)$ 的一些基本邻域之并．根据 $f(\mathscr{T}_1)$ 的定义，可知 $f^{-1}(V)$ 是关于 $\mathscr{T}_1$ 的开集．这就是说，映射 f 是连续的．另一方面，如果 U 是关于 $\mathscr{T}_1$ 的一个开

集，则存在 $f(\mathscr{T}_1)$ 的一个基本邻域 V，使 $f^{-1}(V)=U$。由于 V 是 $\mathscr{T}_2$ 的一些基本邻域之并，因而 V 关于 $\mathscr{T}_2$ 是开的。于是 $f(U)=V$ 是关于 $\mathscr{T}_2$ 的开集。即 f 的逆映射 f^{-1} 是连续的。所以，我们得到如下的定义。

定义 设 X 及 Y 是拓扑空间，而 $f:X\to Y$ 是从 X 到 Y 的一一的满值映射，并且 f 和它的逆映射 f^{-1} 都是连续映射，则 f 称为同胚映射或拓扑映射。而拓扑空间 X 和 Y 称为是同胚的，记为 $X\sim Y$。

例如，当 $X=Y$ 时，恒等映射 $i:X\to Y$ 显然是一一的满值映射，故 i 有逆映射 i^{-1}。设在 X 上的拓扑 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 等价，x 为 X 的任一点，$i(x)=x$，x 的任一基本邻域为 U，则 $i(x)$ 有一基本邻域 $V\subset U$。反之，设 $i(x)$ 的任一基本邻域为 V，则 x 有一基本邻域 $U\subset V$。因此，i^{-1} 与 i 均连续。故 i 是从 X 到 X 的同胚映射。因此，对于等价的拓扑结构，任一拓扑空间 X 同它自己同胚，即 $X\sim X$。

其次，设 $f:X\to Y$，f 是从 X 到 Y 的同胚映射。我们考虑它的逆映射 f^{-1}。显然，f^{-1} 是从 Y 到 X 的一一的满值映射，f^{-1} 与它的逆映射 $f=(f^{-1})^{-1}$ 都是连续的映射，因而 f^{-1} 是从 Y 到 X 的同胚映射。所以，如果 $X\sim Y$，则 $Y\sim X$。

第三，设 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，f 和 g 都是同胚映射。我们来考虑 $gf:X\to Z$。gf 显然是从 X 到 Z 的一一的满值映射，而且 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$。由连续映射的性质可知，gf 与 $(gf)^{-1}$ 均为连续映射。所以，如果 $X\sim Y$，$Y\sim Z$，则 $X\sim Z$。

以上证明了同胚关系是等价关系。因此，拓扑空间可以按同胚与否来进行分类，凡同胚的拓扑空间归为同一类，不同胚的拓扑空间则归为不同类。按照上述证明，每一个拓扑空间必属于一类而且只属于一类。

3.2.2 我们来进一步讨论属于同一等价类的拓扑空间

X 及 Y. X 和 Y 的元素可能相同，也可能不同. 不妨设 X 和 Y 的元素相同，即 $X=Y$，设在 X 和 Y 上的拓扑分别为 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$. $i:X\to Y$ 是从 X 到 X 的恒等映射. i 显然是一一的满值映射. 如果 i 是连续映射，则对于 X 的任一点 x 在 $\mathscr{T}_2$ 的任一基本邻域 U，存在 $\mathscr{T}_1$ 的一个基本邻域 $V\subset U$. 又如果 i^{-1} 也是连续映射，则对于 X 的任一点 x 在 $\mathscr{T}_1$ 的任一基本邻域 V，存在 $\mathscr{T}_2$ 的一个基本邻域 $U\subset V$. 所以，如果 i 是同胚映射，则在 X 上的拓扑 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 等价. 于是，我们证明了，如果两拓扑空间 X 和 Y 同胚，则除了它们的元素可能是不同的对象以外，它们的拓扑是等价的. 所以，两个拓扑空间同胚，就意味着它们的拓扑等价，而不管它们的元素是否相同. 因此，不计较拓扑空间的元素的多样性与复杂性，我们应当把同胚的拓扑空间看成是相同的. 当然，这是从拓扑结构是否等价的观点看问题. 我们知道，拓扑空间的概念是各种具体空间的抽象，它把各种具体空间的具体对象的多样性与复杂性撇开不管，而集中注意于研究它们所共有的拓扑结构以及在此基础上的一系列拓扑性质. 拓扑学的抽象，深刻地反映了客观现实空间的拓扑性质. 研究空间的拓扑性质，就是拓扑学的任务.

如果拓扑空间 X 有性质 p，而 Y 同胚于 X，则 Y 也有性质 p，也就是说，性质 p 是一切同胚映射所保持不变的性质. 性质 p 就称为拓扑性质. 例如，设 X 是一个拓扑空间，$a\in X$，$A\subset X$，而 a 是 A 的一个极限点，则对于任一同胚映射 f，点 $f(a)$ 是子集 $f(A)$ 的极限点. 所以，一个点是一个子集的极限点这一性质是拓扑性质. 证明如下：如果点 $f(a)$ 不是子集 $f(A)$ 的极限点，则存在 $f(a)$ 的一个基本邻域 U，U 与 $f(A)-\{f(a)\}$ 不相交. 由于 f 的连续性，点 a 有一个基本邻域 V，使得 $f(V)\subset U$，$f(V)$ 更不会与 $f(A)-\{f(a)\}$ 相交.

又由于 f 是一一的满值映射，所以 V 也不会与集合 $A-\{a\}$ 相交，这样一来，点 a 就不能是子集 A 的极限点了。所以，如果一个点是一个子集的极限点，则经过同胚映射以后，这个点的象是这个子集的象的极限点。

一个闭集的同胚象仍是闭集。设 X 是拓扑空间，A 是 X 的一个闭子集，而 f 是任一同胚映射，则 $f(A)$ 是闭集。因为 $(f^{-1})^{-1}=f$，故由 f^{-1} 的连续性，可知 $f(A)$ 是闭集。

同理，一个开集的同胚象仍是开集。

边界点也是拓扑性质。设 $f:X\to Y$ 是同胚映射，A 是 X 的真子集，而点 a 是集合 A 的边界点，我们来证明 $f(a)$ 是 $f(A)$ 的边界点。只需证明 $f(a)$ 的任一基本邻域 U 既含有 $f(A)$ 的点也含有 $f(A)^c$ 的点。由于 f 的连续性，存在 a 的邻域 V，使得 $f(V)\subset U$，而 V 既含有 A 的点，又含有 A^c 的点。又由于 f 是一一的满值映射，故 U 既含有 $f(A)$ 的点也含有 $f(A)^c$ 的点。因而 $f(a)$ 是 $f(A)$ 的边界点。

同理可证内点和外点也是拓扑性质。

3.2.3 将同胚概念稍加变通，便得到嵌入的概念。

设 X 及 Y 是拓扑空间，而 Y' 是 Y 的子空间，如果 $f:X\to Y'$ 是从 X 到 Y' 的同胚映射，则 f 称为从 X 到 Y 的嵌入映射，简称为嵌入。

§3 积空间

3.3.1 以下进一步研究构造新的拓扑空间的方法。

设已知任意多个（有限、可数或不可数均可）拓扑空间 $\{X_\lambda:\lambda\in A\}$，考虑这些基集的积集合

$$X=\Pi\{X_\lambda:\lambda\in A\},$$

它由一切形如

$$x=\{x_\lambda:\lambda\in\Lambda,\ x_\lambda\in X_\lambda\}$$

的元素组成。

首先定义从 X 到 X_α 的投影映射

$$\pi_\alpha: X\to X_\alpha,$$

对于每个元素 $x=\{x_\lambda:\lambda\in\Lambda,\ x_\lambda\in X_\lambda\}$，$\pi_\alpha(x)=x_\alpha$。即

$$\pi_\alpha[\{x_\lambda:\lambda\in\Lambda,\ x_\lambda\in X_\lambda\}]=x_\alpha.$$

积集合的概念与投影映射的概念都是从现实中来的，经过推广而得到的。例如，E^1 是直线，而 $E^2=E^1\times E^1$ 不过是一平面。投影映射 π_1 是平面 E^2 的点向第一条轴线 E^1 的投影。而 π_2 则是平面 E^2 的点向第二条轴线 E^1 的投影。

现在引进积拓扑。

设在 X_λ 上的拓扑为 $\mathscr{T}_\lambda$。要在积集合

$$X=\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$$

上确定一最粗的拓扑结构 $\mathscr{T}$，使每个投影映射 π_λ 为连续。$\mathscr{T}$ 应该怎样？

对于任一下标 $\lambda\in\Lambda$ 以及 $\mathscr{T}_\lambda$ 的任一基本邻域 V_λ，考虑 V_λ 在 π_λ 下的原象 $\pi_\lambda^{-1}(V_\lambda)\subset X$，显见

$$\pi_\lambda^{-1}(V_\lambda)=\{x:x\in X,\ \pi_\lambda x\in V_\lambda\}.$$

于是对于 Λ 的任一有限子集 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\}\subset\Lambda$，设

V_{λ_1} 是 $\mathscr{T}_{\lambda_1}$ 的任一基本邻域，

V_{λ_2} 是 $\mathscr{T}_{\lambda_2}$ 的任一基本邻域，

……，

V_{λ_r} 是 $\mathscr{T}_{\lambda_r}$ 的任一基本邻域。

取有限交集

$$\pi_{\lambda_1}^{-1}(V_{\lambda_1})\cap\pi_{\lambda_2}^{-1}(V_{\lambda_2})\cap\cdots\cap\pi_{\lambda_r}^{-1}(V_{\lambda_r})$$

作为积拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基本邻域。如此得到的基本邻域的族 $\mathscr{T}$

$$\mathscr{T}=\{\pi_{\lambda_1}^{-1}(V_{\lambda_1})\cap\cdots\cap\pi_{\lambda_r}^{-1}(V_{\lambda_r}):\lambda_1,\lambda_2,\cdots,$$

$\lambda_i \in \Lambda, V_{\lambda_i} \in \mathscr{T}_{\lambda_i}\}$

显然是在 X 上的拓扑，它是使每个 $\pi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 为连续的最粗的拓扑，称为$\{\mathscr{T}_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$的积拓扑. 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为$\{(X_\lambda,\mathscr{T}_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$的积空间. 记为$(X,\mathscr{T})=\Pi\{(X_\lambda,\mathscr{T}_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$。

例如，$E^2=E^1\times E^1$. 积拓扑的基本邻域有无限个，但只有三种类型：一种是平行于横轴的长条带；另一种是平行于纵轴的长条带；第三种是各边平行于纵横轴的开矩形域. 这样的基本邻域族是 E^1 与 E^1 的平常拓扑的积拓扑。

从积空间的定义可知，如果 G 是积空间

$$\Pi\{(X_\lambda,\mathscr{T}_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$$

的开子集，则对于任一$\alpha\in\Lambda$，$\pi_\alpha(G)$ 是 X_α 的开子集. 也就是说，每一个投影映射 π_α 都是开映射. 因为，当 G 是基本邻域时，$\pi_\alpha(G)$显然是 X_α 的基本邻域或者是 X_α，因而是开集. 当 G 是若干个基本邻域之并时，$\pi_\alpha(G)$ 是若干个基本邻域之并或 X_α，因而也是开集.

从积空间的定义，显见每个投影映射 π_α 都是连续映射.

3.3.2 定理 设 $f:Y\to\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，当且仅当对于每个 $\alpha\in\Lambda$，$\pi_\alpha f:Y\to X_\alpha$ 均为连续时，f 是连续的。

证明 如果 f 连续，由于 π_α 是连续的，则对于 X_α 的任一点 x_α 的任一基本邻域 U，存在 X 中点 $\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ 的一个基本邻域 V，使 $\pi_\alpha(V)\subset U$，又由于 f 连续，因而在 Y 中存在点 $f^{-1}\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ 的一个基本邻域 W，使得 $f(W)\subset V$，所以 $\pi_\alpha f(W)\subset U$，因而 $\pi_\alpha f$ 是连续的。

反之，如果对于每个 α，$\pi_\alpha f$ 均为连续，则对于 X_α 的任一开集 U_α，$(\pi_\alpha f)^{-1}(U_\alpha)$ 为 Y 的开子集，而且

$$(\pi_\alpha f)^{-1}(U_\alpha)=f^{-1}[\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)].$$

由于 $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 为 $X=\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 的开集. 所以. 对于形如 $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$的开集，$f^{-1}[\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)]$是开集. 但是，根据积拓扑的

定义，X 的任一开集 G，不过是形如 $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 的开集的有限交之任意并，根据 1.3.5 的定理，可知 $f^{-1}(G)$ 是形如 $f^{-1}[\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)]$ 的有限交之任意并，因而仍是 Y 的开集．所以 f 是连续的.]

3.3.3 积空间的子集的闭包，有如下性质.

定理 如果 A 是拓扑空间 X 的子集，B 是拓扑空间 Y 的子集，则 $\bar{A}\times\bar{B}=\overline{A\times B}$.

证明 由于 π_X 与 π_Y 的连续性，且

$$\pi_X(A\times B)=A,$$
$$\pi_Y(A\times B)=B,$$

故得(根据 3.1.1)

$$\pi_X\overline{(A\times B)}\subset\bar{A},$$
$$\pi_Y\overline{(A\times B)}\subset\bar{B}.$$

由此，

$$\overline{A\times B}\subset\bar{A}\times\bar{B}.$$

现在证明 $\bar{A}\times\bar{B}\subset\overline{A\times B}$．设 $(x,y)\in\bar{A}\times\bar{B}$，则 $x\in\bar{A}$，$y\in\bar{B}$．因此，对于 x 的任一基本邻域 U 与 y 的任一基域 V，$U\cap A\neq\phi$，$V\cap B\neq\phi$．它们所生成的 (x,y) 的基本邻域皆与 $A\times B$ 相交，因而 $(x,y)\in\overline{A\times B}$.

这就证明了 $\bar{A}\times\bar{B}=\overline{A\times B}$.]

此外，还有如下定理.

定理 设 X 和 Y 是拓扑空间，$f:X\to Y$ 是从 X 到 Y 的映射，以 $F(x)=(x,f(x))$ 定义一映射

$$F:X\to X\times Y,$$

则当且仅当 F 是从 X 到 $X\times Y$ 的子空间

$$G=\{(a,f(a)):a\in X\}$$

的同胚映射时，f 为连续映射.

证明 如果 F 是从 X 到 G 的同胚映射，则根据 3.3.2

的定理，映射 $\pi_Y F: X\to Y$ 是从 X 到 Y 的连续映射．且 $\pi_Y F(x)=f(x)$，由此 $\pi_Y F=f$，所以 f 连续．

反之，设 f 是连续映射．由于 $\pi_X: X\times Y\to X$ 是连续映射，故 π_X 的限制 $(\pi_X)_G$ 是连续的．
而且

$$(\pi_X)_G(x,f(x))=x.$$

所以，$(\pi_X)_G=F^{-1}$，因而 F^{-1} 是连续的．F 显然是从 X 到 G 的一一的满值映射．所以，我们只需再证 F 是连续的．

今以 $\pi_X F(x)=\pi_X[(x,f(x))]=x$ 定义映射

$$\pi_X F: X\to X,$$

则 $\pi_X F$ 是在 X 上的恒等映射，因而一定是连续的．又以 $\pi_Y F(x)=\pi_Y[(x,f(x))]=f(x)$ 定义映射

$$\pi_Y F: X\to Y,$$

则 $\pi_Y F=f$．而根据假设 f 是连续的，因而 $\pi_Y F$ 是连续的．所以，根据 3.3.2 的定理，可知 F 是连续的．因而证明了 F 是同胚映射．]

§4 同　　伦

3.4.1 为了得到拓扑性质，不但要研究同胚映射，往往还要研究同伦映射与合痕映射．

定义 以 I 简记单位区间 $0\leqslant t\leqslant 1$，如果连续映射的族 $f_t: X\to Y$，对于 $x\in X$ 及 $t\in I$ 同时为连续，则连续映射族 f_t 称为伦移．f_t 对于 $x\in X$ 及 $t\in I$ 同时连续的意思是说

$$F(x,t)=f_t: X\times I\to Y$$

为连续映射．

设 f_0，$f_1: X\to Y$ 是从拓扑空间 X 到 Y 的连续映射，如果存在伦移

$$F(x,t): X\times I\longrightarrow Y,$$

使得 $F(x,0)=f_0, F(x,1)=f_1$，则称 f_0 与 f_1 同伦，记为 $f_0\simeq f_1: X\longrightarrow Y$。

3.4.2 我们来证明，从 X 到 Y 的所有连续映射可按同伦关系分成若干等价类，每个等价类叫作一个同伦类。

定理 从 X 到 Y 的所有连续映射的同伦关系 $\simeq$ 是 (1) 自反的，(2) 对称的，(3) 可递的。

证明 (1) 设 $f: X\longrightarrow Y$，我们定义伦移

$$F(x,t): X\times I\longrightarrow Y$$

为 $F(x,t)=f(x)$，即 $F(x,0)=f(x), F(x,1)=f(x)$。故 $f\simeq f$。

(2) 设 $f\simeq g: X\longrightarrow Y$，伦移为 $F(x,t): X\times I\longrightarrow Y$，即 $F(x,0)=f(x), F(x,1)=g(x)$。令 $F'(x,t)=F(x,1-t)$ 得新的伦移 $F': X\times I\longrightarrow Y$，则 $F'(x,0)=g(x)$，而 $F'(x,1)=f(x)$。故 $g\simeq f$。

(3) 设 $f\simeq g: X\longrightarrow Y$，$g\simeq h: X\longrightarrow Y$，伦移分别为 $F(x,t): X\times I\longrightarrow Y$ 及 $G(x,t): X\times I\longrightarrow Y$，即

$$F(x,0)=f(x),\quad F(x,1)=g(x);$$
$$G(x,0)=g(x),\quad G(x,1)=h(x).$$

我们定义一新的伦移 $H(x,t): X\times I\longrightarrow Y$ 为

$$H(x,t)=\begin{cases} F(x,2t) & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ G(x,2t-1) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

则显见 $H(x,0)=f(x)$，而 $H(x,1)=h(x)$。故 $f\simeq h$。]

3.4.3 连续映射的同伦，有如下重要性质。

定理 设 $f_0\simeq f_1: X\longrightarrow Y, g: Y\longrightarrow W, h: Z\longrightarrow X$，则有

$$gf_0 \simeq gf_1 : X \longrightarrow W,$$
$$f_0 h \simeq f_1 h : Z \longrightarrow Y.$$

证明　设 $f_0 \simeq f_1 : X \longrightarrow Y$ 的伦移为 $F : X \times I \longrightarrow Y$. 则 $gF : X \times I \longrightarrow W$ 为 gf_0 与 gf_1 的伦移，故 $gf_0 \simeq gf_1$. 又定义 $H(z, t) = F(h(z), t)$, $z \in Z$, $t \in I$, 则

$$H : Z \times I \longrightarrow Y$$

是 $f_0 h$ 与 $f_1 h$ 的伦移，故 $f_0 h \simeq f_1 h$. ▌

3.4.4　关于恒等映射与常值映射的同伦问题.

定义　设 f_0, $f_1 : X \longrightarrow Y$, f_1 是一个常值映射，即 $f_1(X)$ 是 Y 的一个点，如果 $f_0 \simeq f_1$，则称 f_0 零伦.

又，如果拓扑空间 X 的恒等映射 $i_X : X \longrightarrow X$ 是零伦的，也就是与一个常值映射同伦，则拓扑空间 X 称为可缩的.

3.4.5　现在从同伦的观点研究一下拓扑空间的分类问题.

定义　设 X, Y 是拓扑空间，如果存在连续映射 $f : X \longrightarrow Y$ 及 $g : Y \longrightarrow X$，使得

$gf : X \longrightarrow X$ 与恒等映射 $i_X : X \longrightarrow X$ 同伦，

$fg : Y \longrightarrow Y$ 与恒等映射 $i_Y : Y \longrightarrow Y$ 同伦，

则称 X 与 Y 为同伦型，记为 $X \simeq Y$.

在上述同伦定义中的 g 称为 f 的同伦逆（当然 f 也可称为 g 的同伦逆），f 称为从 X 到 Y 的一个同伦等价. 而 f 及 g 叫作一对同伦等价.

要注意，如果 X 与 Y 同胚，f 是从 X 到 Y 的同胚映射，则有逆映射 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$，使得

$$f^{-1} f : X \longrightarrow X \text{ 及 } f f^{-1} : Y \longrightarrow Y$$

均为恒等映射. 显见 X 与 Y 同伦. 因此，同伦等价概念是同胚概念的一种推广.

3.4.6　**定理**　拓扑空间的同伦型具有自反性、对称性与

可递性。

证明 显然有 $X\simeq X$。又如果 $X\simeq Y$，则 $Y\simeq X$。故还需证可递性。

设 $f:X\longrightarrow Y$，$g:Y\longrightarrow X$，使得 $gf\simeq i:X\longrightarrow X$，$fg\simeq i:Y\longrightarrow Y$；又设 $u:Y\longrightarrow Z$，$v:Z\longrightarrow Y$ 使得 $vu\simeq i:Y\longrightarrow Y$，$uv\simeq i:Z\longrightarrow Z$。考虑连续映射 $uf:X\longrightarrow Z$，$gv:Z\longrightarrow X$。由 3.4.3，因 $vu\simeq i:Y\longrightarrow Y$，得 $gvu\simeq g:Y\longrightarrow X$，且 $gvuf\simeq gf:X\longrightarrow X$。但是 $gf\simeq i:X\longrightarrow X$，因而由 3.4.2，$gvuf\simeq i:X\longrightarrow X$。同理得 $ufgv\simeq uv\simeq i:Z\longrightarrow Z$。于是，$uf$ 是从 X 到 Z 的一个同伦等价，而 gv 是 uf 的一个同伦逆。所以，$X\simeq Z$。]

3.4.7 在研究拓扑性质时，除了要用同伦以外，有时还要用合痕。

定义 设 $f_t:X\longrightarrow Y$ 为伦移。如果对于每个 $t\in I$，f_t 是从 X 到 Y 的同胚，则 f_t 称为从 X 到 Y 的合痕。

又，设 f_0，$f_1:X\longrightarrow Y$ 是从 X 到 Y 的同胚，如果存在合痕 $f_t:X\longrightarrow Y$，则称 f_0 与 f_1 合痕。

习　　题

1. 设 $X=Y$ 是一切实数的集合，在 Y 上的拓扑是平常的拓扑 $\mathscr{T}$，而 $f:x\longrightarrow x^2$，试求 $f^{-1}(\mathscr{T})$。

2. 设 $f:X\longrightarrow Y$，$g:Y\longrightarrow Z$。f，g 均为连续映射，则 gf 亦为连续映射。

3. 设 $f:X\longrightarrow Y$ 为连续，且 $Z\subset X$ 为 X 的子空间，证明 f 的限制 $f_Z:Z\longrightarrow Y$ 也是连续映射。

4. 设 $f:X\longrightarrow Y$，如果在 X 上的拓扑是离散的拓扑，则 f 是连续的。

5. 设 $f:X\longrightarrow Y$，如果在 Y 上的拓扑是不足道的拓扑，则 f 是连续的。

6. 设 $f: X \longrightarrow Y$，$\mathscr{T}_1$ 是在 X 上的拓扑，$\mathscr{T}_2$ 是在 Y 上的拓扑。证明当且仅当 $f(\mathscr{T}_1) \leqslant \mathscr{T}_2$ 时，f 为连续。

7. 证明：$f: X \longrightarrow Y$ 为同胚，当且仅当 f 是一一的满值连续的闭映射。

8. 证明：$f: X \longrightarrow Y$ 为同胚，当且仅当 f 是一一的满值连续的开映射。

9. 设 E^1 是实数空间，在其上定义了平常拓扑，$E^2 = E^1 \times E^1$ 是积空间，E^2 的子集

$$R = \{(x, 1): x \in E^1\}$$

是 E^2 的子空间。试证明 R 与 E^1 同胚。

10. 证明：拓扑空间 X 是可缩的，当且仅当 X 与由一点组成的空间同伦。

11. 对每个 $x \in X$，令 $i(x) = x$。证明从 $(X, \mathscr{T})$ 到 $(X, \mathscr{T}^*)$ 的恒等映射 i 是连续的，当且仅当 $\mathscr{T}^* \geqslant \mathscr{T}$。

第四章 连 通 性

§1 连 通 集

4.1.1 连通性是直觉观念"连成一块"的数学抽象．连通性的反面就是分离性．分离性就是直觉观念"不连成一块"的数学抽象．要注意，连成一块或不连成一块是一种现象．这种现象所反映的本质是什么呢？也就是说，连成一块与不连成一块的本质区别在哪里？极限点的概念适足以解决这一问题．

定义 设A及B是拓扑空间的两个不空子集，如果A及B不相交，且A不含有B的极限点，B也不含有A的极限点，则子集A及B称为是分离的．也就是说，当且仅当

$$A\cap B=A'\cap B=B'\cap A=\phi, A\neq\phi, B\neq\phi,$$

A及B是分离的．当且仅当一个集合不是两个分离的集合之并时，这个集合称为是连通的．

在任一拓扑空间中，任意一个点所成的单点集合是连通的．在离散拓扑空间中，任意两个以上的点所成的集合都是分离的，正因为这个原因，这种拓扑结构称为离散的．在不足道的拓扑空间中，任意一个不空的集合都是连通的．

4.1.2 根据分离集的定义，设A，B分离，而A_1，B_1分别是A，B的不空子集，即$A_1\subset A, B_1\subset B$，则$A_1$与$B_1$是分离的．因为，$B$已经不包含$A$的极限点，故$B_1$更不含有$A_1$的极限点，同样，$A_1$也不可能含有$B_1$的极限点．

4.1.3 为了进一步认识连通性的条件，我们还要掌握一

个概念。设E是拓扑空间X的一个子集，A是E的一个子集，当且仅当A包含自己的一切属于E的极限点时，集A称为闭于E，也就是说，当且仅当

$$A'\cap E\subset A$$

时，A闭于E。同理，当且仅当$E-A$闭于E时，A称为开于E。

4.1.4 设E是一个不连通的集，则它是两个分离子集之并，即$E=A\cup B$。因为B不含有A的极限点，可知A的一切属于E的极限点也必含于A，因而A闭于E。同理，B也闭于E，因而A开于E。所以，如果E是一个不连通的集，则E含有一个真子集既闭于E也开于E。

反之，设A是E的真子集，既开于E，又闭于E，记$B=E-A$。当然，B也闭于E，则由$E=A\cup B$可知A与B是分离的，因而E不是连通的。这样，我们就证明了以下的定理。

定理 当且仅当一个集合E没有真子集既闭于E又开于E时，这个集合E是连通的。

4.1.5 关于连通集，有一系列重要性质。

定理 连通集的闭包是连通集。

证明 设E是连通集，如果它的闭包不连通，那么$\bar{E}=A\cup B$，A与B分离。于是

$$E=E\cap\bar{E}=(E\cap A)\cup(E\cap B).$$

$E\cap A$不能是空的，否则$E=E\cap B\subset B$。由B闭于$\bar{E}$而$\bar{E}$是闭的，故B的一切极限点都属于B，因而B是闭集。但是，这样一来，$\bar{E}\subset B$，这是不可能的。因此$E\cap A\neq\phi$，同理$E\cap B\neq\phi$。又由$E\cap A\subset A$，$E\cap B\subset B$，可知$E\cap A$与$E\cap B$分离，故E不连通，这是不可能的。所以$\bar{E}$是连通的。▌

4.1.6 **定理** 一个连通的集合，如果含于两个分离的集合之并，则这个连通集只含于其中之一。

证明　设E是连通的，集A与B分离，且$E\subset A\cup B$，则$E=(E\cap A)\cup(E\cap B)$。由于$E\cap A\subset A$，$E\cap B\subset B$，A与B分离，因此，如果$E\cap A\neq\phi$，$E\cap B\neq\phi$，则E就不是连通的。所以，$E\cap A=\phi$或者$E\cap B=\phi$，二者至少有一。设$E\cap A=\phi$，则$E=E\cap B$，可知$E\subset B$。同理，如果$E\cap B=\phi$，则$E=E\cap A$，可知$E\subset A$。]

4.1.7　由上述定理推出，如果E是连通集，而$E\subset C\subset\bar{E}$，则C也是连通的。因为，如果C不连通，$C=A\cup B$，A与B分离，则$E\subset A$或$E\subset B$，二者必居其一。如果$E\subset A$，则$E'\subset A'$，于是$\bar{E}\subset\bar{A}$。由$C\subset\bar{E}$可知$\bar{A}\subset\bar{E}$，因而$\bar{A}=\bar{E}$。既然B不含有A的极限点且与A不相交，故$B=\phi$。同理，如果$E\subset B$，则$A=\phi$。这是不可能的。所以C为连通。特别地，当$C=\bar{E}$时，也是连通的，这就是4.1.5的定理。

4.1.8　定理　设E是拓扑空间X的不空子集，S是X的一个连通集，如果S与E相交，且与$X-E$相交，则S与E的边界集E^b相交。

证明　因为$S=(S\cap E)\cup(S\cap E^c)$，由$S$的连通性可知不空集$S\cap E$与$S\cap E^c$不可能分离，因而

$$[(S\cap E)'\cap(S\cap E^c)]\cup[(S\cap E)\cap(S\cap E^c)']\neq\phi.$$

显然

$$(S\cap E)'\subset E',\ (S\cap E^c)'\subset(E^c)'.$$

所以

$$[E'\cap S\cap E^c]\cup[S\cap E\cap(E^c)']\neq\phi.$$

即

$$S\cap[(E'\cap E^c)\cup(E\cap(E^c)')]\neq\phi.$$

而

$$[E'\cap E^c]\cup[E\cap(E^c)']$$

不过是集E的边界集而已。所以，连通集S必含有E的边界

点. ▌

4.1.9 连通性不但是拓扑性质,而且是任意连续映射保持不变的性质.

定理 连通集的连续象是连通集

证明 设 $f:X\longrightarrow Y$ 是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射, E 是 X 的连通子集, 要证 $T=f(E)$ 是连通的. 设 T 不连通, $T=A_1\cup B_1$, A_1 与 B_1 分离. 设 A_1 在 E 的原象为 A, 即

$$A=\{p:p\in E,\ f(p)\in A_1\}.$$

设 B_1 在 E 的原象为 B, 即

$$B=\{p:p\in E,\ f(p)\in B_1\},$$

则 $E=A\cup B$. 由于 A_1 与 B_1 不空不交, 故 A 与 B 也不空不交. 因为 E 是连通的, 故 A, B 中必有一个包含另一个的极限点. 设 $a\in A$ 且 $a\in B'$, 当然 $f(a)\in A_1$. 又设 V 是 $f(a)$ 的任一基本邻域, 由于 f 的连续性, 必存在 a 的一个基本邻域 U, 使得 $f(U)\subset V$. 因为 a 是 B 的极限点, 故 U 含有 B 的一点 b, 当然 $f(b)\in B_1$, 故 V 含有 B_1 的一点 $f(b)$. 于是, 点 $f(a)$ 是集 B_1 的极限点, 而这是不可能的. ▌

§2 连 通 区

4.2.1 当一个集合不连通时,我们自然地想要了解这个集合的分块情况.

如设 E 不连通, x 是子集 E 的一个点, 则 E 的包含 x 的一切连通子集的并集 C_x 必是连通的. 因为如果 $C_x=A\cup B$, 而 A 与 B 分离, 则 x 或者属于 A, 或者属于 B. 如果 $x\in A$, 则根据 4.1.6 的定理, E 的一切包含 x 的连通子集全都包含在 A 中, 这样一来, $C_x\subset A$, 由此得 $B=\phi$, 这是不可能的. 所以 C_x

必是连通的。因此，我们得到

定义 设 X 是一拓扑空间，M 是 X 的子集，$x \in M$，则 M 的一切包含点 x 的连通子集之并 C_x 称为 M 内包含点 x 的连通区。

显然，M 的包含点 x 的连通区 C_x 是 M 的包含点 x 的极大连通子集。

4.2.2 设 M 内包含点 x, y 的连通区分别是 C_x 和 C_y。如 C_x 与 C_y 相交，$C_x \cap C_y \neq \phi$，则 $C_x = C_y$。也就是说，M 内的两个连通区如果相交就完全重合。因为如果点 $z \in C_x \cap C_y$，则 $C_x \cup C_y$ 必定是连结的。否则

$$C_x \cup C_y = A \cup B,$$

而 A 与 B 分离。如 $z \in A$，则 $C_x \subset A, C_y \subset A$。同理，如 $z \in B$，则 C_x 与 C_y 必同时含于 B。这都是不可能的。因此 $C_x \cup C_y$ 为连通集。由于连通区 C_x 是含有 x 的 M 的极大连通子集，因而 $C_x \supset C_x \cup C_y$，故 $C_x \supset C_y$。同理 $C_y \supset C_x$。所以得 $C_x = C_y$。]

4.2.3 从上述内容可知，拓扑空间的子集 M 分为互不相交的连通区，集 M 就是这些连通区的并。设连通区 C_x 与连通区 C_y 不相交，我们来证明 C_x 与 C_y 互相分离。只需证明 C_x 不含有 C_y 的极限点，C_y 也不含有 C_x 的极限点。

假若 C_y 含有一点 z 是 C_x 的极限点，则

$$C_x \subset C_x \cup \{z\} \subset \bar{C}_x.$$

根据上面所述关于连通集的性质，可知 $C_x \cup \{z\}$ 也是 M 的连通子集，因而 $C_x \cup \{z\} \subset C_x$，这与 C_x 的极大性矛盾。所以，C_y 不可能含有 C_x 的极限点。同理，C_x 也不可能含有 C_y 的极限点。这样，我们便证明了，拓扑空间的每一个子集都是若干个两两互相分离的连通集的并，而每一个这样的连通集就是一个连通区。

4.2.4 我们来进一步证明，设 M 是拓扑空间 X 的子集，C_x 是 M 的包含点 x 的连通区，则 C_x 闭于 M。又如果 C_x 是 X 的包含 x 的连通区，则 C_x 是闭集。

因为，如果 C_x 是 M 内包含点 x 的连通区，则 C_x 是在 M 内包含点 x 的极大连通子集，因而除 C_x 外，M 的其他的点不再是 C_x 的极限点，所以 C_x 闭于 M。如果 $M=X$，也就是说，C_x 是 X 内包含点 x 的连通区，由于 C_x 是空间 X 内包含点 x 的极大连通子集，故在 C_x 外不再有 C_x 的极限点。所以，当 $M=X$ 时，C_x 是空间 X 的闭集。

4.2.5 既然集 M 的连通区闭于集 M，那末，是否一定开于集 M 呢？不一定。

例如，设 E^1 是平常拓扑的直线空间，E^1 的子集

$$M=\left\{\frac{1}{n}: n \text{ 是正整数}\right\}\cup\{0\}$$

的一个连通区是 $\{0\}$，但 $\{0\}$ 并不开于 M。

从这个例子还可以看出，集 M 分为可数个连通区：$\{0\}$，$\{1\}$，$\left\{\frac{1}{2}\right\}$，$\left\{\frac{1}{3}\right\}$，…．这可数个连通区虽然是两两互相分离的，但是，连通区 $\{0\}$ 与其余的连通区之并 $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$ 却不分离，因为点 0 是子集 $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$ 的极限点。

从上述内容可见，当拓扑空间 X 具有无限多个连通区时，每一个连通区未必是开的．但是，如果拓扑空间 X 只有有限个连通区，则每一个连通区既开且闭。

§ 3 连通的子空间与积空间

4.3.1 设 Y 是一个拓扑空间，在 Y 上的拓扑为 $\mathscr{T}$。X

是Y的子空间，诱导拓扑为$\mathscr{T}'$。而E是X的子集。

如果E是X的连通子集，我们来证明E也是Y的连通子集。假设相反，E不是Y的连通子集，则$E=A\cup B$，A与B不空，不交，每一个都不含有另一个的极限点。由于E是X的连通子集，故A或B必含有另一个的极限点。设A含有一点a是B的极限点，则a的任一基本邻域必含有B的点。但a在X的任一基本邻域都是$\mathscr{T}$的一个基本邻域U与X的交$U\cap X$，既然$U\cap X$含有B的点，当然U也含有B的点。这样一来，点a在拓扑$\mathscr{T}$中的每一个基本邻域均与B相交，可见点a在拓扑空间Y中是B的极限点，这是不可能的。

反之，如果E是Y的连通子集，则E也是子空间X的连通子集。因为，如果E在X中不连通，则$E=A\cup B$，A与B不空，不交，每一个不含有另一个的极限点。又由于E在Y中连通，故A与B不分离。如设A有一点a是B的极限点，则对于$\mathscr{T}$的每一个a的基本邻域U均与B相交，于是，a在X的每一个基本邻域$U\cap X$都与B相交，可见点a在子空间X中仍是B的极限点，故A与B不分离。这是不可能的。

总之，我们证明了，一个集的连通性具有绝对的性质。因此，我们考虑集合E的连通性，可以在整个空间中讨论，也可以在包含E的子空间中讨论，甚至可以只讨论子空间E。

4.3.2 定理 积空间$X\times Y$是连通的，当且仅当每一个因子空间X，Y是连通的。

证明 如果积空间$X\times Y$是连通的，则$X\times Y$的连续象$\pi_X(X\times Y)=X$以及$\pi_Y(X\times Y)=Y$仍然是连通的。

反之，如果X及Y是连通的。在积空间$X\times Y$中任取两点(x,y)及(x^*,y^*)。积空间$X\times Y$的子集$\{x\}\times Y$及$X\times\{y^*\}$分别与Y及X同胚，因而都是连通的，它们有一个公共点(x,y^*)，因而并集

$$\{x\}\times Y\bigcup X\times\{y^*\}$$

也是连通的。由于$(x,y)\in\{x\}\times Y$，$(x^*,y^*)\in X\times\{y^*\}$是积空间$X\times Y$的任意两点，所以积空间$X\times Y$是连通的。▌

4.3.3 上述定理不难推广至任意多个空间的积空间。

定理 积空间$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是连通的，当且仅当每一个因子空间$X_\lambda$都是连通的。

证明 如果积空间$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是连通的，则经过投影映射后得到的因子空间

$$\pi_\alpha\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=X_\alpha$$

每一个都是连通的。

反之，如果每一个因子空间X_λ是连通的，我们来证明，积空间$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$也是连通的。为此，设$a=\{a_\lambda:\lambda\in\Lambda,a_\lambda\in X_\lambda\}$是积空间的任一点。又设积空间包含此点的连通区为$C$。只需证明积空间的任意一点均属于$C$。

任取一点$x=\{x_\lambda:\lambda\in\Lambda,\ x_\lambda\in X_\lambda\}$及包含此点的一个基本邻域$U$。

设

$$U=\pi_{\lambda_1}^{-1}(V_{\lambda_1})\bigcap\pi_{\lambda_2}^{-1}(V_{\lambda_2})\bigcap\cdots\bigcap\pi_{\lambda_n}^{-1}(V_{\lambda_n}),$$

其中V_{λ_i}是点x_{λ_i}在空间X_{λ_i}的任一个基本邻域，$i=1,2,\cdots,n$。在U中任取一点a'，使

$$a'=\{x_\lambda:\lambda\in\Lambda,x_\lambda\in X_\lambda,\text{当}\ \lambda\neq\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\ \text{时},x_\lambda=a_\lambda\}.$$

注意积空间的子集A：

$$A=\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda,\text{当}\ \lambda\neq\lambda_1,\cdots,\lambda_n\ \text{时},X_\lambda=\{a_\lambda\}\},$$

A必同时包含点a及a'。由于子集A与积空间

$$X_{\lambda_1}\times X_{\lambda_2}\times\cdots\times X_{\lambda_n}$$

同胚，既然$X_{\lambda_1}\times X_{\lambda_2}\times\cdots\times X_{\lambda_n}$是连通的(4.3.2不难推广到有限积)，故子集$A$也是连通的。$A$包含点$a$因而整个地含于$C$。因而连通区$C$也包含点$a'$。这就证明了点$x$的任一

基本邻域U含有C的一点．由于C是极大的连通子集，所以点$x\in C$，否则$C\cup\{x\}$仍为连通集，C就不可能是极大的连通子集了．]

§4 局部连通性

4.4.1 一个拓扑空间，虽然整个地说来不是连通的，但是局部地看来却可能是连通的．

定义 设X是拓扑空间，如果点$a\in X$的每一个基本邻域都包含点a的一个连通的开邻域，则称拓扑空间X在点a是局部连通的．如果空间X在每一点都局部连通，则称X是局部连通的．

换句话说，空间X在点a局部连通是指空间X在点a有任意小的连通的开邻域．

存在不连通的但却是局部连通的集．例如直线内不相交的两开线段是不连通的但却是局部连通的．

反之，也存在连通而非局部连通的集．例如平面内连接点$(0,0)$与点$\left(1,\frac{1}{n}\right)$的闭线段$S_n(n=1,2,3,\cdots)$及点$\left(\frac{1}{2},0\right)$与点$(1,0)$的并集合

$$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup\left\{\left(\frac{1}{2},0\right)\right\}\cup\{(1,0)\}.$$

由于$S_1\cup S_2\cup\cdots$是连通集而点$\left(\frac{1}{2},0\right)$及$(1,0)$都是这个连通集的极限点，因而它们的并也是连通集．但是点$(1,0)$的充分小的邻域不包含点$(1,0)$的连通邻域．

因此，从一个集合的连通性不能推知局部连通性．从局部连通性也不能推知连通性．

4.4.2 定理 拓扑空间为局部连通的充分必要条件是

每一开集的每一连通区是开集.

证明　设X为局部连通空间，V是X的开集，而C是V的一个连通区．对于C的每一点x，存在开连通集V_x包含x而完全含于V．于是$C\cup V_x$是连通集而完全含于V．根据C的极大性，$V_x\subset C$，由此推出

$$C=\{V_x: x\in C\},$$

故C是开集之并。

反过来，如果每一个开集的连通区都是开集，则每一点的每一开邻域都包含连通的开邻域，这就是此开邻域的连通区．因而空间是局部连通的。]

4.4.3　定理　积空间$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是局部连通的当且仅当每一因子空间$X_\lambda$都是局部连通的，而且除有限个外都是连通的。

证明　设每一个X_λ都是局部连通的，并且除$X_{\beta_1}, X_{\beta_2}, \cdots, X_{\beta_n}$外都是连通的．要证明积空间$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是局部连通的．设$x$是积空间的任一点．又设$V$是点$x$的任一基本邻域．根据积空间基本邻域的定义，存在有限个下标，设为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$．又设$\pi_{\lambda_i}x=x_{\lambda_i}$，存在$x_{\lambda_i}$在$X_{\lambda_i}$的基本邻域$V_{\lambda_i}(i=1, \cdots, r)$，使

$$V=\bigcap_{i=1}^{r}\pi_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i}).$$

由于每个X_λ都是局部连通的，故对于

$$\lambda=\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n; \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$$

存在连通的开邻域G_λ，使$x_\lambda\in G_\lambda\subset V_\lambda$．现在考虑积空间的子集合$\Pi\{Z_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，其中$Z_\lambda$定义为：当$\lambda=\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n; \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$时$Z_\lambda=G_\lambda$；否则$Z_\lambda=X_\lambda$．显然$x\in\Pi\{Z_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\subset V$．根据4.3.3，$\Pi\{Z_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是连通的开集．于是，对于任

一点 x 及 x 的任一基本邻域 V，我们求得了一个包含点 x 而含于 V 的连通开集 $\Pi\{Z_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$。因此，$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是局部连通的.

反之，设积空间是局部连通的。又设 x_λ 是 X_λ 的任一点，x_λ 的任一基本邻域为 V_λ.要证明，存在 x_λ 的连通开邻域含于 V_λ。考虑积空间中满足 $\pi_\lambda z=x_\lambda$ 的一点 z，显见 $z\in\pi_\lambda^{-1}(V_\lambda)$。根据积空间的局部连通性，积空间中存在一连通的开集 G 包含点 z 而含于开集 $\pi_\lambda^{-1}(V_\lambda)$。于是 $\pi_\lambda(G)$ 是连通的开集，$\pi_\lambda(G)\subset V_\lambda$，而且 $x_\lambda\in\pi_\lambda(G)$。这就证明了因子空间 X_λ 是局部连通的。还要证明因子空间 X_λ 除有限个外都是连通的.设 z 是积空间的任意一点，它必包含在某一连通开集 G 内.根据开集定义，存在 z 的基本邻域 V，使得 $z\in V\subset G$。根据基本邻域的定义，存在有限个 λ_i，使

$$V=\bigcap_{i=1}^{n}\pi_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i}),$$

其中 V_λ 为 x_λ 的基本邻域，而 $x_\lambda=\pi_\lambda z$。于是，只要 $\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$\pi_\lambda(G)=\pi_\lambda(V)=X_\lambda$。又由投影映射的连续性，可知这些 X_λ 都是连通的。所以，X_λ 除有限个外都是连通的.]

4.4.4 定理 设 X 是局部连通空间，且 f 是连续的闭映射，则 $f(X)$ 是局部连通的.

证明 设 $f(X)=Y$，而 C 是 Y 的任一开集 U 的任一连通区，根据 4.4.2，需证 C 是开集.由于 f 是连续的，故 $f^{-1}(U)$ 是开集.先证 $f^{-1}(C)$ 是 $f^{-1}(U)$ 的若干个连通区的并.设 V 是 $f^{-1}(U)$ 的一个连通区，如果 V 与 $f^{-1}(C)$ 交于一点 v，则 $f(V)$ 与 C 交于一点 $f(v)$.由于 $f(V)$ 是连通的，而 C 又是 U 的连通区，可知 $f(V)\subset C$，因而 $V\subset f^{-1}(C)$.所以 $f^{-1}(C)$ 是 $f^{-1}(U)$ 的若干个连通区之并.又由 4.4.2 知 $f^{-1}(U)$

的连通区都是开集，因而 $f^{-1}(C)$ 是开集．现在进而证明 $f[f^{-1}(C)]=C$ 是开集．由于 f 是闭映射，因而 $f[X-f^{-1}(C)]$是闭集．但

$$f[X-f^{-1}(C)]=f[f^{-1}(Y-C)]=Y-C,$$

可知闭集 $Y-C$ 的余集 C 是开集．】

所以，局部连通性是拓扑性质．

§ 5　道路连通与弧连通

4.5.1　我们来进一步研究连通性．

定义　设 f 是从拓扑空间 $I=[0,1]$到拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的连续映射，则象集 $P=f(I)$称为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的道路，点 $f(0)$与 $f(1)$ 分别称为此道路的起点与终点．又设 φ 是从拓扑空间 $I=[0,1]$到拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的嵌入映射，则象集 $A=\varphi(I)$称为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的弧，点 $\varphi(0)$与 $\varphi(1)$分别称为此弧的始点与终点．

定义　设 p,q 是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的两点，如果在空间$(X,\mathscr{T})$内存在一道路（弧），以 p 为始点，以 q 为终点，则点 p,q 称为是道路（弧）连通的．设 M 是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子集，如果对于 M 的任意两点．都有一完全含于 M 的道路（弧）以这两点为端点，则 M 称为是道路（弧）连通的．

显然，道路（弧）连通性把拓扑空间的点划分为互不相交的子集，凡道路（弧）连通的点属于一个子集，称为拓扑空间的一个道路（弧）连通区．每一个道路（弧）连通区显然是拓扑空间的一个极大的道路（弧）连通子集．

在拓扑空间中，两个点如果是弧连通的，则这两个点也是道路连通的．因此，一个弧连通区一定完全含于某一道路连通区．又，一个道路连通集一定是一个连通集，因为道路是连

通集[0,1]的连续象，因而是连通集．所以，一个道路连通区一定完全含于某一连通区内．这就证明了，弧连通的拓扑空间是道路连通的，而道路连通的空间是连通的．

但是，反过来，连通的未必是道路连通的．例如，设 S_n 是连接点(0,0)与$\left(1,\frac{1}{n}\right)$的闭线段，则集合$M$

$$M=\left\{\left(\frac{1}{2},0\right)\right\}\cup\{(1,0)\}\cup S_1\cup S_2\cup\cdots$$

是连通的．因为 $S_1\cup S_2\cup\cdots$是连通的集，故添加极限点$(\frac{1}{2}$, 0) 与 (1,0) 后得到的集 M 也是连通的．但是，点 $(\frac{1}{2},0)$与(1,0)却不能用一完全含于 M 的道路连接起来，因而集 M 不是道路连通的．

4.5.2 定理 如果空间的一切道路连通区是开集，则空间的一切连通区都是道路连通区．

证明 如果空间有一连通区不是道路连通区，则它分为若干个道路连通区．设U是其中一个道路连通区，而其余的道路连通区的并为V，则V是一开集，因为开集的并仍为开集．U也是开集，而这个连通区等于U与V的并．这是不可能的，因为此时U与V分离．所以，此拓扑空间的任一连通区同时也是道路连通区，这就证明了定理．]

4.5.3 现在进一步证明

定理 一个拓扑空间是道路连通的当且仅当这个拓扑空间是连通的而且它的每个道路连通区是开集．

证明 如果拓扑空间是道路连通的，显然它是连通的，只有一个道路连通区，就是空间本身，当然是开集．

反之，如果一拓扑空间是连通的，而且它的每个道路连通区是开集，由上面的定理可知，这个拓扑空间的唯一的连通区同时也是道路连通区，因而这个拓扑空间是道路连通的．]

4.5.4 定理 如果一个拓扑空间是连通的，而且它的每一点均有一道路连通的基本邻域，则这个拓扑空间是道路连通的.

证明留给读者.

4.5.5 定义 拓扑空间是局部道路连通的，当且仅当它的每一点有任意小的道路连通的开邻域. 也就是说，设 p 是空间的任一点，V 是 p 的任一基本邻域，则 p 有一道路连通的开邻域完全含于 V.

每一局部道路连通的拓扑空间一定是局部连通的. 因为，局部道路连通的拓扑空间的每一个道路连通区的任一点都有一道路连通的开邻域，这个道路连通区既然与这个基本邻域相交，由于连通区的极大性，这个道路连通区就整个地包含这一道路连通的开邻域. 因此，每一个道路连通区都是开集. 根据 4.5.2 的定理，可知这个拓扑空间的连通区既是道路连通区又是开集，根据 4.4.2 的定理，这个空间一定是局部连通的.

4.5.6 定理 局部道路连通的拓扑空间是道路连通的，当且仅当它是连通的.

证明 如果一个拓扑空间是道路连通的，那么它一定是连通的. 反之，如果局部道路连通的拓扑空间是连通的，则由 4.5.4 可知，它一定是道路连通的.]

4.5.7 弧连通或道路连通都是拓扑性质，我们甚至还有更强的结果.

定理 设 f 是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射，如果 E 是 X 的道路连通子集，则 $f(E)$ 是 Y 的道路连通子集.

证明 设 y_1, y_2 是 $f(E)$ 的任意两点，在 E 中必存在两点 x_1, x_2，使 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$. 由于 E 是道路连通的，故

E中有一道路$U=g(I)$，使$g(0)=x_1, g(1)=x_2$。于是$V=f(U)=f[g(I)]$便是$f(E)$的道路，且$f[g(0)]=y_1$，$f[g(1)]=y_2$。这就证明了$f(E)$是道路连通的。]

习　　题

1．设X是一个连通的拓扑空间，则X的任一真子集的边界集不空。

2．设X是一个连通的拓扑空间，C是X的连通子集。证明如果$X-C=A\cup B$，A与B分离，则$A\cup C$及$B\cup C$皆为连通。

3．证明：如果集E的每两个点都属于E的某一连通子集，则E是连通的。(Hausdorff 定理)

4．证明：任意多个连通集，如果每两个都有公共点，则这些连通集的并仍是连通集。(Hausdorff 定理)

5．如果$(X, \mathscr{T})$是一个连通的拓扑空间，又$\mathscr{T}^*\geqslant\mathscr{T}$，证明拓扑空间$(X, \mathscr{T}^*)$也是连通的。

6．确定实直线上开子集的连通区的构造。

7．证明：如果A是积空间$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$的一个连通子集，则它在每一个因子空间$X_\lambda$的投影是$X_\lambda$的连通子集。

8．证明：C是$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$的连通区，当且仅当$C=\Pi\{C_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，其中每个$C_\lambda$是$X_\lambda$的连通区。

9．如果S是连通而又局部连通的，且C是S的一个开集的连通区，$S-\bar{C}$又不空，试证$\bar{C}-C$不空，且C与$S-\bar{C}$分离。

10．证明：局部连通空间的开子集是局部连通的。

11．设集A与B是道路连通的，试证明，如果$A\cap B\neq\phi$，则$A\cup B$是道路连通的。

12．证明 4.5.4 定理。

第五章　紧　　性

§1　紧空间

5.1.1　紧性是最重要的拓扑性质，起源于数学分析的研究，很早就为人们所认识。例如直线上无限个点的集合，在什么条件下一定有极限点呢？粗略地说来，就是这些点分布得比较紧密。比如这些点全部在一有限区间内，就算比较紧密了。在这样的条件下，这个子集一定有极限点。这就是数学分析中著名的 Bolzano-Weierstrass 定理。后来经过人们的深入研究，逐步发展成为紧性的概念。

定义　设X是一个集合，$\{D_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是集合X的子集的族。如果

$$\bigcup\{D_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=X,$$

则子集族$\{D_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$称为$X$的一个覆盖。$\Lambda$ 的基数为有限就称为有限覆盖，为可数就称为可数覆盖。

又，如果Γ是Λ的子集，$\Gamma\subset\Lambda$，且子集的族$\{D_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$仍覆盖$X$，即

$$\bigcup\{D_\gamma:\gamma\in\Gamma\}=X,$$

则子族$\{D_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$称为覆盖$\{D_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$的子覆盖。

如果覆盖$\{D_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$的每个元素$D_\lambda$都是开集(闭集)，则$\{D_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$称为开(闭)覆盖。

定义　拓扑空间X称为紧的，当且仅当它的每一开覆盖都有有限子覆盖。换言之，设 $\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是任意多个开集的族，且

$$\bigcup\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=X,$$

则族$\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$中有有限多个$O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \cdots, O_{\lambda_m}$,使

$$\bigcup_{i=1}^{m} O_{\lambda_i}=X.$$

又,拓扑空间X的一个点集E称为紧的,当且仅当E的每一开覆盖都有有限子覆盖.也就是说,如果$E\subset\bigcup\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$,$\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是任一开集族,则存在有限个元素$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$,$\lambda_m\in\Lambda$,使$E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m} O_{\lambda_i}$。

例如,在拓扑空间E^1中,$I=[0,1]$是紧的。因为,如设开集族$\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$覆盖$I$,假设覆盖$I$的$\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$没有能覆盖$I$的有限子族,将$I$二等分,得$\left[0, \frac{1}{2}\right]$与$\left[\frac{1}{2},1\right]$,则其中至少有一不能为有限个$O_\lambda$所覆盖,记为$I_1$($I$的一半);又将$I_1$二等分,其中至少有一不能为有限个$O_\lambda$所覆盖,记为$I_2$($I_1$的一半,$I$的$\frac{1}{4}$);如此继续下去,我们可得一列闭区间

$$I\supset I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots.$$

这列闭区间的每一个都不能被有限个O_λ所覆盖.但是,另一方面,这列闭区间的后一个是前一个的一半,即I_1是I的$\frac{1}{2}$,I_2是I的$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$,$\cdots\cdots$,$I_n$是$I$的$\frac{1}{2^n}$。以$a_n$表示$I_n$的左端,以$b_n$表示$I_n$的右端,由于

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

以a表示这一公共极限,则点$a\in I_1, I_2, \cdots, I_n\cdots$.既然$a\in I$,

因此在 I 的覆盖$\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$中,至少有一开集包含点 a,设为 O_{λ_0}. 根据开集的定义,必存在一以 a 为中心的开线段完全含于开集 O_{λ_0}.又根据点 a 是 I_n 两端点的极限,可知存在一自然数 n_0,只要 $n>n_0$, I_n 就完全包含于这个以 a 为中点的开线段因而完全包含于开集 O_{λ_0}. 这是不可能的,因为根据我们的取法,每一个 I_n 都不能被有限个 O_λ 所覆盖. 所以,I 的开覆盖$\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$必有有限子覆盖.

5.1.2 定理 拓扑空间是紧的,当且仅当有任意一族闭集$\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$,如果它的交是空的,即

$$\bigcap\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\phi,$$

则族$\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$中存在有限个 $F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}, \cdots, F_{\lambda_n}$, 其交是空集,即

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}=\phi.$$

证明 设拓扑空间X是紧的,而闭集族$\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$的交是空的,即

$$\bigcap\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\phi,$$

则由并余交公式,得

$$\bigcup\{F_\lambda^c:\lambda\in\Lambda\}=[\bigcap\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}]^c=X.$$

因而$\{F_\lambda^c:\lambda\in\Lambda\}$是拓扑空间$X$的一个开覆盖. X是紧的,故必有一有限子覆盖,设

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}^c=X.$$

因而

$$\left[\bigcup_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}^c\right]^c=\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}^{cc}=\phi.$$

即

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}=\phi.$$

反过来，设$\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是$X$的开覆盖，即

$$\bigcup\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=X,$$

则

$$\bigcap\{O_\lambda^c:\lambda\in\Lambda\}=[\bigcup\{O_\lambda:\lambda\in\Lambda\}]^c=\phi,$$

故$\{O_\lambda^c:\lambda\in\Lambda\}$是交为空的闭集族．可知必存在有限个$O_\lambda^c$，其交为空．设

$$\bigcap_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}^c=\phi,$$

于是

$$\bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}^{cc}=X.$$

即

$$\bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}=X.$$

这就证明了拓扑空间X是紧的．]

为了使这条定理便于应用，引进如下定义．

定义 集合X的子集族$\{S_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$称为具有有限交性质，当且仅当任意有限个$S_\lambda$的交不空．

根据此定义，上述定理可以换成另一种说法．

定理 拓扑空间是紧的，当且仅当任一具有有限交性质的闭集族具有不空的交集．

证明请读者练习．

5.1.3 紧性不仅是拓扑性质，而且是连续映射保持不变

的性质.

定理 设 f 是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射，A 是 X 的紧子集，则 $f(A)$ 是 Y 的紧子集.

证明 设 $\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 $f(A)$ 的任一开覆盖，即

$$f(A)\subset\bigcup\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}.$$

因而

$$A\subset f^{-1}[\bigcup\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}],$$
$$A\subset\bigcup\{f^{-1}(V_\lambda):\lambda\in\Lambda\}.$$

故 $\{f^{-1}(V_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$ 是 A 的一个覆盖. 由于 f 是连续的，每一个 $f^{-1}(V_\lambda)$ 都是拓扑空间 X 的开集，因而 $\{f^{-1}(V_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$ 是集 A 的开覆盖. A 既然是紧的，故必有一有限子覆盖. 设

$$A\subset f^{-1}(V_{\lambda_1})\cup f^{-1}(V_{\lambda_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(V_{\lambda_n}),$$

这样一来，

$$f(A)\subset V_{\lambda_1}\cup V_{\lambda_2}\cup\cdots\cup V_{\lambda_n}.$$

也就是说，$f(A)$ 的任一开覆盖 $\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 必有有限子覆盖 $\{V_{\lambda_1},V_{\lambda_2},\cdots,V_{\lambda_n}\}$.]

由此推知，如果拓扑空间 Y 同胚于紧的拓扑空间 X，则拓扑空间 Y 也是紧的.

5.1.4 紧空间的子集未必是紧的. 例如，我们来证明紧拓扑空间 $[0,1]$ 的子集 $(0,1)$ 不是紧的. 设

$$V_n=\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right),n=3,4,5,\cdots,$$

则开集族 $\{V_3,V_4,V_5,\cdots\}$ 是 $(0,1)$ 的开覆盖. 但是，任意有限多个这样的开集都不能覆盖 $(0,1)$. 只须注意，对于每一整数 $k>3$，有

$$\frac{1}{k} \notin \bigcup_{i=3}^{k} V_i = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \cup \cdots \cup \left(\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right).$$

由此可见，对于任意有限个 V_i，只要取 k 足够大，$\frac{1}{k}$ 就不能被这有限个 V_i 所覆盖。所以，(0,1)不是紧的。

但是，我们有如下定理.

定理 紧空间的闭子集必是紧的.

证明 设 F 是拓扑空间 X 的闭子集. 又 $\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 F 的任一开覆盖. 把开集 F^c 添加到开集族 $\{V_\lambda\}$，便得到 X 的一个开覆盖，即

$$\bigcup\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\cup F^c = X.$$

由于 X 是紧的，故必有一有限子覆盖，设

$$F^c \cup V_{\lambda_1} \cup V_{\lambda_2} \cup \cdots \cup V_{\lambda_n} = X,$$

因而

$$V_{\lambda_1} \cup V_{\lambda_2} \cup \cdots \cup V_{\lambda_n} \supset F.$$

所以，F 是紧的. ▌

§ 2 可数紧

5.2.1 把紧性的条件略为放松，便得到可数紧的概念.

定义 拓扑空间 X 称为可数紧的，当且仅当 X 的每一可数开覆盖必有一有限子覆盖.

显然，紧空间必是可数紧的.

为了叙述可数紧的条件，首先说明聚点的概念.

定义 拓扑空间 X 的一点 x 称为是子集 S 的聚点，如果 x 的每一基本邻域均含有 S 的无限多个点.

显然，如果点 x 是子集 S 的聚点，则点 x 当然也是 S 的

极限点. 反之，子集 S 的极限点未必就是 S 的聚点. 只含有有限个点的集合没有聚点.

定理 拓扑空间 X 是可数紧的，当且仅当每一无限子集 $S\subset X$ 必有一聚点在 X 中.

证明 假设拓扑空间 X 有一没有聚点的无限子集，则这个无限子集必含有一可数的没有聚点的子集 S，由于 S 在 X 中没有聚点，于是，对于每一点 $x\in X$，存在一开集 O_x，使 O_x 只含有 S 的有限个点. 对于 S 的每一有限子集 F，以 O_F 表示开集

$$O_F=\bigcup\{O_x:O_x\cap S=F\}.$$

如此得到的开集族 $\{O_F:F$ 是 S 的有限子集$\}$ 是 X 的可数开覆盖(见第一章习题 13). 由于每一个 O_F 只交无限集 S 于有限个点，故任意有限个 O_F 只能覆盖 S 的有限个点，因而不能覆盖 X. 所以，X 不是可数紧的.

反过来，设 X 不是可数紧的，则存在 X 的可数开覆盖 $\{O_i:i\in N\}$，而任意有限个 O_i 都不能覆盖 X. 因 O_1 不能覆盖 X，故存在点 $x_1\notin O_1$，设 i_2 最小，使 $x_1\in O_{i_2}$，又因 $O_1\cup\cdots\cup O_{i_2}$ 不能覆盖 X，故存在点 $x_2\notin O_1\cup\cdots\cup O_{i_2}$，当然 x_2 异于 x_1；$\cdots$. 于是存在相异的点列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，使得对于每一个 n，$x_n\notin O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_{i_n}$，则无限子集

$$S=\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$$

在 X 中没有聚点. 因为每一个 O_i 同 S 只能有有限个交点. ▌

5.2.2 我们还可以把聚点的概念扩充一下.

定义 拓扑空间 X 的点的序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

简记为 (x_n).

点 x 称为序列 (x_n) 的聚点，当且仅当 x 的每个基本邻域均含有序列 (x_n) 的无限项.

点 x 称为序列(x_n)的极限点，当且仅当 x 的每一个基本邻域皆含有序列(x_n)中除有限项外其余一切项，记为$(x_n)\longrightarrow x$，称为(x_n)收敛于 x。

可见序列的极限点必是聚点．但是，序列的聚点不必是极限点．

如果拓扑空间X的每一序列皆有聚点，则称拓扑空间X具有 Bolzano-Weierstrass 性质．

现在证明

定理 拓扑空间X是可数紧的当且仅当它具有 Bolzano-Weierstrass 性质.⇔列紧

证明 设X不是可数紧的，则存在一可数开覆盖$\{O_i: i\in N\}$，但它的任何有限个都不能覆盖X．如5.2.1 所证，存在一序列(x_n)。(x_n)在X中没有聚点．

反之，设X是可数紧的，(x_n)是任一序列，如果(x_n)中有无限项相异，则根据 5.2.1 的定理，序列(x_n)在X中必有聚点．如果(x_n)中只有有限项不同，则根据序列聚点的定义，(x_n)必有聚点，故X具有 Bolzano-Weierstrass 性质.▌

§ 3 局部紧

5.3.1 定义 拓扑空间X于点 p 局部紧，当且仅当点 p 有一基本邻域 U，其闭包$\bar{U}$ 是紧的．如果拓扑空间 X 于每一点局部紧，则X称为局部紧的．

显然，紧空间是局部紧的．同时，从局部紧的定义可知，拓扑空间X是局部紧的，当且仅当每一点有一基本邻域，其闭包是紧的．

我们知道，n 维欧氏空间

$$E^n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_1, \cdots, x_n \text{ 为任意实数}\}$$

不是紧的，然而 E^n 却是局部紧的．因为，如取球邻域

$B(x,r)=\{(y_1,\cdots,y_n):\sqrt{(y_1-x_1)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}<r\}$

作为基本邻域，则每一个球邻域的闭包是紧的．

又，紧性是连续映射不变的，但局部紧则不然．例如，E^1 的子拓扑空间

$$S=\{-1,(0,1)\}$$

是局部紧的．而 E^2 的子拓扑空间

$$T=\left\{(0,0),\left(x,\ \sin\frac{1}{x}\right)\right\},\text{其中 } 0<x<1$$

在点(0,0)不是局部紧的，因为包含点(0,0)的任意开集在 T 的闭包不是紧的．考虑连续映射 f，

$$f(-1)=(0,0),$$

$$f(x)=\left(x,\ \sin\frac{1}{x}\right),0<x<1.$$

由此可见，连续映射改变了局部紧性质．

5.3.2 我们可以证明局部紧性是拓扑不变的．

✓**定理** 局部紧性是连续的闭开映射保持不变的．

证明 设 X 是局部紧空间，f 是连续的闭开映射，且 $Y=f(X)$．设 q 是 Y 的任一点，要证 Y 于点 q 是局部紧的．若 $f(p)=q$，由于 X 于点 p 局部紧，故存在点 p 的基本邻域 U，$\bar{U}$ 是紧的．由于 f 是开映射，故 $f(U)$ 是开的．又由于 f 是连续的，故 $f(\bar{U})$ 是紧的．而且 $f(\bar{U})=\overline{f(U)}$．所以，点 q 有一开邻域 $f(U)$，其闭包是紧的．因而点 q 有一基本邻域 $V\subset f(U)$，其闭包 $\bar{V}\subset\overline{f(U)}$ 是紧的．可见拓扑空间 Y 于点 q 为局部紧．]

✓**定理** 局部紧空间的闭子空间是局部紧的．

证明 设拓扑空间 X 是局部紧的，而 C 是 X 的一个闭子集，则 X 的一个开集与 C 的交是子空间 C 的一个开集．所

以，如果x是C的一个点，而U是X中的一个开集，它包含x且有紧的闭包，则$U\cap C$是C的开集，而$\overline{U\cap C}$是$\overline{U}$的闭子集因而是紧的.】

§4 仿紧空间

5.4.1 把紧性的概念加以推广，即可得仿紧性概念.

首先注意紧性的有限条件，把它加以推广，即得局部有限的概念.

定义 拓扑空间X的子集族称为是局部有限的，如果空间的每一点均有一基本邻域只和这个子集族的有限个子集相交.

因此，有限子覆盖显然是局部有限的.

其次，注意覆盖的加细.

定义 设$\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$及$\{V_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$是拓扑空间$X$的两个覆盖，如果每个$U_\lambda$必含于某个$V_\gamma$之中，则称$\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是$\{V_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$的加细. 记为$\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\prec\{V_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$.

显然，一个覆盖的子覆盖是这个覆盖的加细.

由此得到紧性的推广概念.

定义 拓扑空间X称为是仿紧的，当且仅当它的每一开覆盖均有局部有限的开加细.

显然，紧空间必是仿紧空间.

仿紧性是拓扑不变的. 也就是说，仿紧空间经同胚映射所得到的空间仍然是仿紧空间.

5.4.2 我们知道，紧空间的子空间未必是紧的，同样，仿紧空间的子空间未必是仿紧的. 然而，我们有

定理 仿紧空间的闭子空间必是仿紧的.

证明 设S是仿紧空间X的闭子空间. 又设$\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$

是子空间 S 的开覆盖．由于存在 X 的开集族$\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，使得 $V_\lambda=S\cap U_\lambda$，又由于 S 是闭集，故 $X-S$ 及开集族 $\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 组成 X 的开覆盖．既然 X 是仿紧空间，故存在这一开覆盖的局部有限开加细，设为$\{W_\alpha:\alpha\in A\}$．于是，$\{S\cap W_\alpha:\alpha\in A\}$ 为开覆盖$\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$的局部有限开加细．所以，闭子空间 S 是仿紧空间.]

5.4.3 关于局部紧与仿紧的关系，有如下定理．

定理 可数个紧集之并的局部紧空间是一个仿紧空间．

证明 设局部紧空间 X 是可数个紧集 C_n 之并．不妨设每一个 $C_n\subset C_{n+1}$，否则取 $C_n'=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$ 代替 C_n．首先证明 X 是开集 W_n 之并，而每一个 $\overline{W}_n$ 是紧的且含于 W_{n+1}．对于 C_1 的每一个点 x，设 V_x 是包含 x 的基本邻域，且 $\overline{V}_x$ 是紧的，则紧集合 C_1 为有限个这样的集 $V_{x_1},V_{x_2},\cdots V_{x_n}$ 所覆盖．令 $W_1=\bigcup_{i=1}^{n}V_{x_i}\supset C_1$．假设对于每一个 $m<n$ 已经定义了 W_m，使得 $C_m\subset W_m$，且 $\overline{W}_m$ 是紧的，含于 W_{m+1}．象对于 C_1 一样，考虑集合 $\overline{W}_{n-1}\cup C_n$，因为它是紧的，故可得到一个开集 W_n，它覆盖 $\overline{W}_{n-1}\cup C_n$，且有紧的闭包．

设$\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是 X 的任一开覆盖．考虑紧集合

$$K_n=\overline{W}_n-W_{n-1}.$$

对于 K_n 的每一个点 x，设 U_λ 包含点 x，则存在含于 U_λ 且包含点 x 的基本邻域 V_x，这个 V_x 可取得使之含于 W_{n+1}（因为 $K_n\subset\overline{W}_n\subset W_{n+1}$），这个 V_x 还可取得使之和$\overline{W}_{n-2}$ 不相交（因为$\overline{W}_{n-2}\subset W_{n-1}$）．于是 K_n 被有限个这样的集合 V_x 所覆盖．同样地考虑每一个自然数 n，便得到 X 的一个开覆盖 $\{V_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$．从 V_γ 的取法可知，$\{V_\gamma\}$是$\{U_\lambda\}$的加细．又，如果 y

是 X 的任一点，则存在一最小整数 n 使得 $y\in\overline{W}_n$。由于 y 不属于 W_{n-1}，故在 $\{V_\gamma\}$ 中存在一开集 V 包含 y，这个开集 V 只能与 $\{V_\gamma\}$ 中覆盖 K_{n-2}、K_{n-1}、K_n 及 K_{n+1} 的有限个开集相交。因此，$\{V_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ 是局部有限的.】

从上述证明过程可知，定理中的"可数个"可以换为"有限个"。因此，我们证明了定理：有限或可数个紧集之并的局部紧空间是一个仿紧空间.

§5 紧 化

5.5.1 因为紧空间比非紧空间更易于研究，所以，在研究非紧空间时，往往构造一个紧空间，使所要研究的非紧空间是它的一个子空间，以达到利用紧空间帮助研究非紧空间的目的。这就是紧化问题.

定义 拓扑空间 X 的单点紧化空间的基集是 $X^*=X\cup\{\infty\}$. ∞ 表示不属于 X 的一个新元素. 定义 X^* 的基本邻域为，X 的开集；以及使 X^*-U 是 X 的闭紧子集的集 $U\subset X^*$.

我们来证明，单点紧化空间满足拓扑空间的条件. 由于空集是闭紧子集，故点 ∞ 至少有一基本邻域为 X^*，X^* 的属于 X 的点更不消说了. 其次，如果两基本邻域都含有点 ∞，这两个基本邻域的交之余等于它们的余之并. 但是，两个闭紧集的并仍是闭紧集，因而这两个基本邻域的交仍是基本邻域. 又，如果一个基本邻域包含点 ∞，另一不包含点 ∞，因包含点 ∞ 的基本邻域开于集 X，故除去点 ∞ 后是 X 的开集，因而这两个基本邻域的交是 X 的开集，故仍为基本邻域. 所以，单点紧化空间是拓扑空间. 最后，如果 $\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 X^* 的开覆盖，设 ∞ 属于某一开集 V_{λ_0}，由于

$$X^*-V_{\lambda_0}=X-V_{\lambda_0}$$

是紧闭集，故有有限子覆盖V_{λ_1}，V_{λ_2}，$\cdots$，V_{λ_n}，则V_{λ_0}，V_{λ_1}，$\cdots$，V_{λ_n}即为$\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$的有限子覆盖。所以，$X^*$是紧空间。

关于紧化的重要意义，详见8.5.2。

习 题

1．设$A=(0,1]$，取一开覆盖如下：

$$O_1=\left(\frac{1}{2},2\right)，从 O_2 起，O_n=\left(\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n-1}\right).$$

证明开集族$\{O_i\}$覆盖A，但没有有限个能覆盖A，因而A不是紧的。

2．设$\{U_i:i\in N\}$是$[0,1]=I$的开覆盖。定义I的子集P如下：点x属于P，当且仅当$\{U_i\}$有一有限子族覆盖$[0,x]$。试证明P是开集又是闭集，因而$P=[0,1]$，所以$[0,1]$是紧的。

3．设N为自然数集，定义拓扑

$$\mathscr{T}=\{\{2n-1,2n\}:n\in N\},$$

试证$(N,\mathscr{T})$非可数紧更非紧。

4．如果$(X,\mathscr{T})$是一个紧的拓扑空间，又$\mathscr{T}^*\geqslant\mathscr{T}$，证明拓扑空间$(X,\mathscr{T}^*)$也是紧的。

5．证明：可数紧空间的任一闭子空间仍是可数紧的。

6．证明：两个可数紧集之并仍是可数紧的。

7．证明：可数紧等价于下述条件：设$\{C_n\}$是拓扑空间X的可数个闭集的族，具有有限交性质，则$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C_i$是不空的。

8．证明：局部紧空间是一族紧子空间的并，并且这些紧子空间的内域都是不空的且覆盖这个局部紧空间。

9．证明：仿紧性是拓扑不变的。

10．证明：一仿紧空间与一紧空间的积空间是仿紧的空间。

11．拓扑空间X称为序列紧的，当且仅当X的每一序列必有一子

序列收敛于 X 的一点。证明一序列紧空间必是可数紧的.

12. 定义拓扑空间 X 是局部紧的当且仅当每一点有一紧的基本邻域，证明按正文定义的局部紧空间必按此定义为局部紧的。

第六章　可离性与可数性

§1　T_0空间与T_1空间

6.1.1　前而所述的连通性与紧性，不仅同拓扑空间的基集的性质有关，而且更同拓扑空间的拓扑结构的性质有关．因此，本章进一步研究拓扑结构方面的性质——可离性与可数性．

定义　拓扑空间X称为T_0空间，当且仅当其拓扑结构满足可离条件T_0：如果x及y是X的两个不同的点，则存在一个基本邻域包含其中一点而不包含第二个点．

显然，同胚于一T_0空间的空间是T_0空间，而且，T_0空间的每一个子空间仍是一个T_0空间．一般说来，如果空间具有某种性质，而它的每一个子空间仍有此性质，则这种性质称为遗传的．因而，T_0空间是遗传的．

现在研究T_0空间的简单特性．

定理　拓扑空间X是一T_0空间，当且仅当不同点的闭包是不同的．

证明　假设$x\neq y$，它们的闭包$\overline{\{x\}}$及$\overline{\{y\}}$不相等．不妨设$z\in\overline{\{x\}}$而$z\notin\overline{\{y\}}$．我们来证明$x\notin\overline{\{y\}}$．假设相反，$x\in\overline{\{y\}}$，则$\overline{\{x\}}\subset\overline{\overline{\{y\}}}=\overline{\{y\}}$，于是$z\in\overline{\{x\}}\subset\overline{\{y\}}$，与$z\notin\overline{\{y\}}$矛盾．所以$x\notin\overline{\{y\}}$，因而$\overline{\{y\}}^c$是一个包含$x$而不包含$y$的开集，故拓扑空间$X$是$T_0$空间．

反之，设X是T_0空间，而x及y是X的两个不同的点．根据T_0条件，存在一基本邻域U包含其中一点而不包含另

一点．不妨设 $x\in U$，而 $y\notin U$．显然 U^c 是一闭集，它包含点 y 而不包含点 x．可见 $y\in\overline{\{y\}}$ 而 $x\notin\overline{\{y\}}$．所以，$\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$.]

6.1.2 定义 拓扑空间 X 称为 T_1 空间，当且仅当其拓扑结构满足条件 T_1：如果 x 及 y 是 X 的两个不同的点，则存在基本邻域包含 x 而不包含 y，同时存在基本邻域包含 y 而不包含 x．

显然，T_1 空间是拓扑性质也是遗传性质．同时，T_1 空间显然是 T_0 空间．但是 T_0 空间可以不是 T_1 空间．例如，2.1.1 的例 4 就是一个不是 T_1 空间的 T_0 空间．

下述定理说明 T_1 空间的简单特性．

定理 拓扑空间 X 是 T_1 空间，当且仅当每一个单点集是闭集．

证明 设拓扑空间 X 的单点集都是闭集，x 及 y 是空间 X 的两个不同的点．由于 $\{x\}$ 及 $\{y\}$ 是闭的，故 $\{x\}^c$ 是一个包含 y 而不包含 x 的开集，$\{y\}^c$ 则是一个包含 x 而不包含 y 的开集．可见拓扑空间 X 满足 T_1 条件，是一个 T_1 空间．

反之，设 X 是一个 T_1 空间，且 x 是 X 的任一点，对于另一异于 x 的点 y，存在一基本邻域 V_y 包含 y 而不包含 x．于是，$y\in V_y\subset\{x\}^c$，故 $\{x\}^c$ 是一切可能的这样的 V_y 的并，因而是开集，可知 $\{x\}$ 是一个闭集.]

6.1.3 从上述 T_1 空间的简单特性，我们可进一步推知 T_1 空间的性质．

定理 在 T_1 空间 X 内，一点 x 是集 E 的极限点，当且仅当包含 x 的每一开集含有 E 的无限个相异的点．

证明 显然，条件是充分的．为了证明必要性，设存在一开集 G 包含点 x 而 $G\cap E$ 是有限的．如设 $G\cap(E-\{x\})=\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$，由于在 T_1 空间内，每一个单点集 $\{x_i\}$ 都是闭集，因而有限并 $\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$ 是一个闭集．但是，$(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\})^c\cap G$ 是

一个包含点 x 的开集而

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\right)^c\cap G\cap(E-\{x\})=\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\right)^c\cap\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}=\phi,$$

故点 x 不是 E 的极限点.】

§2 T_2空间

6.2.1 定义 拓扑空间 X 称为 T_2 空间或 Hausdorff 空间，当且仅当它满足 Hausdorff 条件：如果 x 及 y 是 X 的两个不同的点，则存在两个不交的开集，其一包含 x 而另一包含 y.

显然，T_2 空间既是拓扑不变性质，又是遗传性质。每一个 T_2 空间显然是 T_1 空间。但是，T_1 空间不必是 T_2 空间。例如第二章习题 2 的有限余拓扑空间就是一个 T_1 空间然而却不是 T_2 空间。

现在证明 Hausdorff 空间的重要性质。

定理 Hausdorff 空间的紧子集都是闭集。

证明 设 E 是 Hausdorff 空间的紧集，要证 E^c 是开集。在 E^c 中任取一点 x，要证明存在一开集 $G\subset E^c$。对于 E 的任一点 y，存在不交的开集 G_x 及 G_y，$x\in G_x$，$y\in G_y$。于是 $\{G_y: y\in E\}$是 E 的开覆盖，由于 E 是紧的，故存在有限子覆盖$\{G_{y_i}: i=1,2,\cdots n\}$。设对应包含 x 的有限个开集为$\{G_{x_i}: i=1,2,\cdots,n\}$，又设

$$G=\bigcap_{i=1}^{n}G_{x_i},$$

则 G 是包含点 x 的开集，而且

$$G=\bigcap_{i=1}^{n}G_{x_i}\subset\bigcap_{i=1}^{n}G_{y_i}^c=\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_{y_i}\right)^c\subset E^c.$$

因此 E^c 是开的，故 E 是闭的. ▌

6.2.2 定理 拓扑空间 X 的单点紧化空间 X^* 是 Hausdorff 空间，当且仅当 X 是局部紧的 Hausdorff 空间.

证明 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间. x 及 y 是 X^* 的两个不同的点. 要证明存在两个不交的开集，一个包含点 x，另一个包含点 y. 如果 x 及 y 都属于 X，由于 X 是 Hausdorff 空间，这样的两个开集显然存在. 如果有一属于 X，另一不属于 X，例如 $x\in X$ 而 $y=\infty$，由于 X 是局部紧的，故存在点 x 的一个基本邻域 G，它的闭包 $\bar{G}$ 是紧的. 于是 $\bar{G}^c$ 是包含点 $y=\infty$ 的一个开集，显然 $\bar{G}^c$ 与 G 不相交.

反之，设 X^* 是一 Hausdorff 空间，由于 X 是 X^* 的子空间，因而也是 Hausdorff 空间. 设 x 是 X 的任意一点，则 x 与 ∞ 是 Hausdorff 空间 X^* 的两个不同的点，故存在两个不交的开集 $G_x\ni x$ 及 $G_\infty\ni\infty$. 由于 G_∞ 的余集 G_∞^c 是 X 的闭紧子集，既然 G_∞ 与 G_x 不相交，故 $G_x\subset G_\infty^c$. G_∞^c 既是闭紧的集，当然 $\bar{G}_x$ 也是紧集. 这就证明了 X 是局部紧的. ▌

6.2.3 现在证明

定理 在 Hausdorff 空间内，收敛序列有唯一的极限.

证明 设在 Hausdorff 空间 X 内，序列 (x_n) 收敛于两个不同的点 x 及 x^*. 根据 T_2 条件，存在两个不交开集 G 及 G^*，使得 $x\in G$, $x^*\in G^*$. 由于 $x_n\to x$，存在一整数 N，使得当 $n>N$ 时，$x_n\in G$. 又由于 $x_n\to x^*$，存在一整数 N^*，使得当 $n>N^*$ 时，$x_n\in G^*$. 设整数 m 既大于 N 又大于 N^*，则 x_m 既属于 G 也属于 G^*，这就同 G 及 G^* 不相交矛盾.▌

对于非 Hausdorff 空间，收敛序列的极限可以不是唯一的，例如 2.1.1 例 4，拓扑空间 N 的序列 $1,2,3,\cdots,n\cdots$ 收敛于每一个自然数. 而对于 Hausdorff 空间，则不可能发生此种情形.

§ 3 第一可数性

6.3.1 定义 拓扑空间 X 称为是第一可数空间，当且仅当满足下述第一可数性条件：对于每一点 $x\in X$，存在包含点 x 的至多可数个基本邻域的族 $\{B_n: n=1,2,3,\cdots\}$，使得对于任一包含点 x 的基本邻域 G，存在自然数 n，使 $B_n\subset G$。$\{B_n: n\in N\}$ 称为在点 x 的可数基。

对于拓扑空间 E^1，每一个点 x 有可数个形如 $\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)$ 的基本邻域满足定义的条件。故 E^1 是一个第一可数空间。但是也存在不是第一可数的空间。

例如，Fort 空间。设 X 是一个不可数的集合，固定 X 的一个元素，以 ∞ 表示这个元素，凡不包含元素 ∞ 的子集均取作基本邻域；凡包含元素 ∞ 的，只要其余集是有限的，也取作基本邻域，这样便得到一个紧的 Hausdorff 空间。然而这个空间不是第一可数空间。证明如下：假设不然，设这个空间是第一可数的，在点 ∞ 有一可数基本邻域族 $\{B_n\}$。由于 B_n 包含点 ∞，B_n^c 必是有限集，因而

$$\bigcup\{B_n^c: n\in N\}=[\bigcap\{B_n: n\in N\}]^c$$

必为可数，既然 X 是不可数的，故在 $\bigcap\{B_n: n\in N\}$ 中必存在异于 ∞ 的点 x。但是 $\{x\}^c$ 是一包含 ∞ 的开集，又由族 $\{B_n\}$ 的定义，对于某些自然数 n，$B_n\subset\{x\}^c$，这样一来，$x\notin B_n$，便得到矛盾。所以 X 不是第一可数的。

6.3.2 定理 第一可数空间是 Hausdorff 空间，当且仅当它的每一个收敛序列有唯一的极限。

证明 由 6.2.3 的定理可知条件是必要的。为了证明充

分性，设第一可数空间X不是Hausdorff空间，则必存在两个点x及y，使得包含x的开集与一切包含y的开集相交．设

$$\{B_n(x):n\in N\}与\{B_n(y):n\in N\}$$

分别是在点x和y的可数基．定义

$$B_n^*(x)=\bigcap_{k\leqslant n}B_k(x),$$

$$B_n^*(y)=\bigcap_{k\leqslant n}B_k(y),$$

则$B_n^*(x)$与$B_n^*(y)$分别是包含点x及y的开集，故对于每一自然数n，$B_n^*(x)\cap B_n^*(y)\neq\phi$．选取属于这个交的一点$x_n$，便得到一序列$x_1,x_2,x_3,\cdots$．又设$G_x$及$G_y$分别是包含$x$及$y$的任意开集，由于$B_n^*(x)$及$B_n^*(y)$是递缩的，故必存在自然数$N$，当$n>N$时，

$$B_n^*(x)\subset G_x,\quad B_n^*(y)\subset G_y.$$

于是$x_n\to x$，同时$x_n\to y$．收敛序列x_n有两个极限x及y．矛盾．]

定理　如果X是第一可数的T_1空间，则点x是子集E的极限点的充分而必要的条件是E中存在相异点的序列收敛于点x．

证明　条件显然是充分的．需证必要性．设x是E的极限点，如上述定理证明所示，不妨设$\{B_n\}$是点x的递缩的可数基．由6.1.3的定理可知，$B_n\cap(E-\{x\})$必是无限的，故可在此集中选取一点x_n．并且可使这些点各不相同．如在$B_1\cap(E-\{x\})$中选一点x_1，在$B_2\cap(E-\{x\})$中选一异于x_1的点x_2，在$B_3\cap(E-\{x\})$中选一异于x_1、x_2的点x_3，……．显然，$x_n\to x$，因为$\{B_n\}$是在点x的递缩的可数基．]

定理　设f是从第一可数空间X到拓扑空间X^*的映射，则f在点$x\in X$为连续的充分必要条件是在X中(x_n)收

敛于 x，蕴涵在 X^* 中，$(f(x_n))$收敛于 $f(x)$。

证明　如果 f 是连续的。设在拓扑空间 X 中，$x_n\to x$ 要证明在 X^* 中，$f(x_n)\to f(x)$。设 G^* 是 X^* 的包含 $f(x)$ 的开集，则 $f^{-1}(G^*)$是 X 的开集，它包含 x。由于 $x_n\to x$，故存在自然数 N，当 $n>N$ 时，$x_n\in f^{-1}(G^*)$。于是，当 $n>N$ 时，$f(x_n)\in G^*$，所以 $f(x_n)\to f(x)$。

如果 f 在点 x 不连续，则存在包含 $f(x)$ 的开集 G^*，使得对于每一个包含 x 的开集 G 均有

$$f(G)\cap G^{*c}\neq\phi.$$

设在点 x 的递缩可数开基为$\{B_n\}$，则对于每一个 n，$f(B_n)\cap G^{*c}\neq\phi$。选取 $x_n^*\in f(B_n)\cap G^{*c}$，由于 $x_n^*\in f(B_n)$，可取点 $x_n\in B_n$，使得 $f(x_n)=x_n^*$。既然$\{B_n\}$是递缩开基，故 $x_n\to x$。然而，由于 $x_n^*\in G^{*c}$，序列 $(f(x_n))=(x_n^*)$ 不可能收敛于 $f(x)$。]

§4　第二可数性

6.4.1　定义　拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 称为第二可数空间或具有可数基的拓扑空间，当且仅当它满足下述第二可数性条件：拓扑 $\mathscr{T}$ 具有可数基，也就是说，存在至多可数个基本邻域 $V_1,V_2,V_3,\cdots$，使得 $\mathscr{T}$ 的每一个基本邻域都是这可数个基本邻域中若干个的并。

显然，可数基的存在，既是拓扑不变的，又是遗传的。虽然第二可数空间必是第一可数空间，但第一可数空间不必是第二可数空间。例如，以不可数无限个元素的集合为基集，具有离散拓扑的空间是第一可数的，但不是第二可数的。又如，拓扑空间 E^1 是第二可数的。因为两端为有理数的一切开区间就是这个第二可数空间的可数开基。

6.4.2 有可数基的拓扑空间具有如下简单性质.

定理 在具有可数基的拓扑空间中，不空不交的开集族至多有可数个开集.

证明 设第二可数空间X的可数基为

$$\{B_n : n \in N\},$$

又设$\mathscr{G}$是X的一个不空不交的开集族，则对于$\mathscr{G}$的每一个开集G，存在一个最小的自然数n，使得$B_n \subset G$，于是$\mathscr{G}$的每一个开集对应一个自然数. 又由于$\mathscr{G}$的开集不交不空，故$\mathscr{G}$的不同的开集对应不同的自然数. 故$\mathscr{G}$的元素的个数不超过自然数的个数. 所以$\mathscr{G}$的元素个数至多是可数的.]

6.4.3 定理 第二可数空间的子集的开覆盖必有可数子覆盖.

证明 设E是第二可数空间X的子集，$\{B_n\}$是X的可数而开集族$\mathscr{G}$是E的开覆盖. 以$N(\mathscr{G})$表示一切可能的使$B_n \subset G \in \mathscr{G}$的自然数$n$的集合，则一切使得$n \in N(\mathscr{G})$的$B_n$即已覆盖集$E$，即

$$E \subset \bigcup \{B_n : n \in N(\mathscr{G})\}.$$

然后在$\mathscr{G}$中选取子集族$\{G_n\}$，使得对于每一个n，$B_n \subset G_n$. 显然，可数开集族$\{G_n\}$覆盖子集E.]

定义 拓扑空间称为Lindelöf空间，当且仅当它的每个开覆盖有可数子覆盖.

因此，第二可数空间是Lindelöf空间. 同时，我们证明了可数紧的Lindelöf空间是紧空间.

6.4.4 我们知道，对于E^1空间的平常拓扑，每一个点的每个基本邻域均包含E^1的不可数个点. 把这种情形加以普遍化，我们得到

定义 在拓扑空间X中，一点x称为子集E的凝聚点，当且仅当包含点x的每个基本邻域均含有E的不可数个点.

据此我们可证明

定理 第二可数空间的不可数子集至少含有一个凝聚点.

证明 设具有可数基$\{B_n\}$的拓扑空间X的子集E没有凝聚点.对于每一点$x\in E$,存在一基本邻域B_{n_x},使得$B_{n_x}\cap E$至多是可数的. 于是,

$$E=\bigcup\{B_{n_x}\cap E: x\in E\}$$

是至多可数个至多可数集的并. 因而E至多可数. 矛盾.]

6.4.5 定理 局部紧的第二可数空间是仿紧空间.

证明 不妨设此空间的可数基的每一个基本邻域的闭包是紧的,则此空间是可数个紧子集之并. 于是根据 5.4.3 的定理,可知此空间是仿紧的.]

§ 5 可分空间

6.5.1 定义 拓扑空间X的子集E称为稠密于X,当且仅当$\bar{E}=X$. 拓扑空间X称为是可分的,当且仅当X存在一至多可数的稠密子集.

虽然可分性是拓扑性质,但却不是遗传性质. 例如设$(X,\mathscr{T})$是一个任意的拓扑空间. 添加一个新元素∞于X,令$X^*=X\cup\{\infty\}$,又添加新元素∞于$(X,\mathscr{T})$的每一个基本邻域,得

$$\mathscr{T}^*=\{G^*: G^*=G\cup\{\infty\}, G\in\mathscr{T}\},$$

则$(X^*,\mathscr{T}^*)$是拓扑空间,而$\{\infty\}$是它的稠密子集. 故$(X^*,\mathscr{T}^*)$是可分的,但子空间$(X,\mathscr{T})$却不必是可分的.

如果可分拓扑空间的每个子空间都是可分的,这拓扑空间就称为遗传可分的.

定理 第二可数空间是遗传可分的.

证明　因为第二可数空间的子空间也是第二可数的空间，所以，只需证明每一个第二可数空间是可分的．在可数基的每一个开集任取一点，如此得到的子集显然是稠密的．]

6.5.2　反过来，可分的拓扑空间不必是第二可数的．

例如，Appert 空间．设 X 是一切自然数的集合．以 $N(n,E)$ 表示含于 E 中的小于或等于 n 的自然数的个数．取 X 的子集 G 为基本邻域：$1\notin G$；$1\in G$ 而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n,G)}{n}=1.$$

我们来证明，X 是可分的、Hausdorff 的、非第一可数的拓扑空间．

设 G_1 及 G_2 是基本邻域．如果 $1\notin G_1\cap G_2$，则 $G_1\cap G_2$ 仍为基本邻域．如果 $1\in G_1\cap G_2$，需证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n,G_1\cap G_2)}{n}=1.$$

由于 $N(n,G)+N(n,G^c)=n$，显然，若 $1\in G$，则

$$\lim\frac{N(n,G^c)}{n}=0.$$

故由 $1\in G_1$ 及 $1\in G_2$，有

$$\lim\frac{N(n,G_1^c)}{n}=0,\quad \lim\frac{N(n,G_2^c)}{n}=0.$$

考虑方程

$$N(n,G_1\cap G_2)+N(n,G_1\cap G_2^c)+N(n,G_1^c\cap G_2)+$$
$$+N(n,G_1^c\cap G_2^c)=n$$

及不等式

$$N(n,G_1\cap G_2^c)\leqslant N(n,G_2^c),$$

$$N(n,G_1^c\cap G_2)\leqslant N(n,G_1^c),$$

$$N(n,G_1^c\cap G_2^c)\leqslant N(n,G_1^c),$$

得

$$\lim\frac{N(n,G_1\cap G_2)}{n}=1-\lim\frac{N(n,G_1\cap G_2^c)}{n}-$$

$$-\lim\frac{N(n,G_1^c\cap G_2)}{n}-\lim\frac{N(n,G_1^c\cap G_2^c)}{n}$$

$$\geqslant 1-\lim\frac{N(n,G_2^c)}{n}-\lim\frac{N(n,G_1^c)}{n}-\lim\frac{N(n,G_1^c)}{n}=1.$$

得

$$\lim\frac{N(n,G_1\cap G_2)}{n}=1.$$

所以，$G_1\cap G_2$ 仍为基本邻域．这就证明了 X 是拓扑空间．X 显然是可分的．

X 是 Hausdorff 空间：设 x 及 y 是 X 的两个相异的点．如果 $x\neq 1\neq y$，则$\{x\}$及$\{y\}$即为包含点 x 及 y 的不交邻域．如果 $x\neq 1=y$，则集 $\{x\}$ 及 $\{x\}^c$ 为包含点 x 及 y 的不交邻域．

X 不是第一可数空间：设 $\{B_n\}$ 是于点 1 的可数开基．每个 B_n 必是无限的，故可在每个 B_n 中，选取一点 $x_n\in B_n$，使得 $x_n>10^n$．设

$$G=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}^c,$$

我们来证明 G 是包含点 1 的基本邻域．由于

$$N(n,G)\geqslant n-\log_{10}n,$$

故

$$\lim\frac{N(n,G)}{n}\geqslant\lim\frac{n-\log_{10}n}{n}=1.$$

所以，G 是包含点 1 的基本邻域．但是，由于 $\{B_n\}$是于点 1 的开基，故对于某个 n，$1\in B_n\subset G$．而 $x_n\in B_n$，故 $x_n\in G$，这就同$x_n\notin G$ 矛盾．▌

§ 6　正则空间与正规空间

6.6.1　定义　拓扑空间X为正则的，当且仅当它满足正则条件：如果F是X的闭子集，而x是不属于F的一点，则存在两个不交的开集，一个包含F，另一个包含点x。

易证正则性是拓扑性质和遗传性质。

定理　拓扑空间X是正则的当且仅当对于每一点$x\in X$及包含点x的开集G，存在一开集G^*，使$x\in G^*\subset\overline{G^*}\subset G$。

证明　设X是正则的，且点x属于开集G。$F=X-G$是一闭集，它不包含点x。根据正则条件，存在两开集G_F及G_x，使得$G_x\cap G_F=\phi$，且$x\in G_x$，$F\subset G_F$。由于$G_x\subset G_F^c$，

$$\bar{G}_x\subset\overline{G_F^c}=G_F^c\subset F^c=G,$$

于是得

$$x\in G_x\subset\overline{G_x}\subset G.$$

反之，设条件满足，而点x不属于闭集F，则x属于开集F^c。由假设，存在开集G^*，使

$$x\in G^*\subset\overline{G^*}\subset F^c,$$

显然，G^*及$\overline{G^*}^c$即为分别包含点x及集F的不交开集。故X是正则的.]

定义　正则的T_1空间称为T_3空间。

显然，T_3空间必是T_2空间。但T_2空间不必是T_3空间。例如，设X是直线上点的集合，一点x的基本邻域定义为任一包含点x的开区间内一切有理点(坐标为有理数的点)及点x所组成的集。显然X是一拓扑空间，它不是正则的，然而却是T_2空间。

6.6.2　定义　拓扑空间X称为是正规的，当且仅当它满足正规条件：如果F_1及F_2是X的两个不交闭子集，则存在

两个不交开集，一个包含 F_1，另一个包含 F_2。

定义 正规的 T_1 空间称为 T_4 空间。

显然，T_4 空间也是 T_3 空间。但反之则不然。例如，设 X 是 E^2 中那些 $y\geqslant 0$ 的点 (x,y) 的集合。对于 $y>0$ 的点 (x,y)，取以 (x,y) 为中心的圆的内部为点 (x,y) 的基本邻域。对于 $y=0$ 的点 $(x,0)$，则取中心在上半平面切横轴于点 $(x,0)$ 的圆的内部及点 $(x,0)$ 所成的集合为点 $(x,0)$ 的基本邻域。显然，X 是一个 T_3 空间，但它却不是正规空间。因为，对于 x 轴上一切有理点的集与一切无理点（坐标为无理数的点）的集，虽然它们是不交闭集，但却不存在分别包含这两个闭集的不交不空的开集。

6.6.3 正规性的特征如下

定理 拓扑空间 X 是正规的，当且仅当对于任意闭集 F 及包含 F 的开集 G，存在一开集 G^*，使 $F\subset G^*\subset\overline{G^*}\subset G$。

证明 设 X 是正规的，且闭集 F 含于开集 G，则 $K=X-G$ 是与 F 不相交的闭集。根据正规条件，存在两不交开集 G_F 及 G_K，使得 $F\subset G_F$、$K\subset G_K$。由于 $G_F\subset X-G_K$，故

$$\overline{G}_F\subset\overline{X-G_K}=X-G_K\subset X-K=G.$$

反之，设条件成立，而 F_1 及 F_2 是 X 的不交闭集。此时，$F_1\subset X-F_2$。根据假设，存在开集 G^*，使得

$$F_1\subset G^*\subset\overline{G^*}\subset X-F_2.$$

显然，G^* 及 $X-\overline{G^*}$ 分别是包含 F_1 及 F_2 的不交开集.]

定理（Урысон） 拓扑空间 X 是正规的，当且仅当对于 X 的任意两个不交闭集 F_1 及 F_2，存在一连续映射

$$f:X\longrightarrow[0,1],$$

使得 $f(F_1)=\{0\}$，$f(F_2)=\{1\}$。

证明 如果存在所说的连续映射 $f:X\to[0,1]$，则由于

$f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right)\right)$及$f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right)$是分别包含$F_1$及$F_2$的不交开集，故$X$是正规的.

反之，设X是正规的，我们来构造一个合乎要求的映射g。根据1.5.2，首先将[0,1]的一切有理数依次用自然数作下标表示出来：

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \cdots, r_n, \cdots,$$

注意使$r_1=0, r_2=1$. 然后，对于每个自然数n，定义开集G_{r_n}，使当$r_i<r_j$时$\bar{G}_{r_i}\subset G_{r_j}$。$G_{r_n}$归纳地定义如下：对于$r_2=1$，令$G_{r_2}=X-F_2$；对于$r_1=0$，令$G_{r_1}$是包含$F_1$而其闭包含于$G_{r_2}$的一个开集. 即$G_{r_1}$满足

$$F_1\subset G_{r_1}\subset\bar{G}_{r_1}\subset G_{r_2}.$$

对于$n\geqslant 3$，假设$G_{r_1}, G_{r_2}, G_{r_3}, \cdots, G_{r_{n-1}}$均已定义. 取满足条件

$$i, j<n \quad 且 \quad r_i<r_n<r_j$$

的最大的r_i与最小的r_j，因$\bar{G}_{r_i}\subset G_{r_j}$，故由$X$的正规性，存在一包含$\bar{G}_{r_i}$而闭包含于$G_{r_j}$的开集，定义此开集为$G_{r_n}$，即$G_{r_n}$满足条件

$$\bar{G}_{r_i}\subset G_{r_n}\subset\bar{G}_{r_n}\subset G_{r_j}.$$

因此，根据数学归纳法原理，对于一切含于[0,1]的有理数r，G_r均已定义，且当$r<s$时，$\bar{G}_r\subset G_s$。

现在定义映射g如下：如果$x\in F_2$，定义$g(x)=1$；如果$x\notin F_2$，定义

$$g(x)=\inf\{r: x\in G_r\}.$$

显见，对于任意$x\in X$，$g(x)$是[0,1]的一个确定的实数。我们注意，当且仅当存在$r<q$，使$x\in G_r$时，$g(x)<q$. 故

$$\{x: g(x)<q\}=\bigcup\{G_r: r<q\}$$

是一开集. 又当且仅当存在$r>p$，使$x\notin\bar{G}_r$时，$g(x)>p$，因

而

$$\{x : g(x) > p\} = \bigcup\{X - \bar{G}_r : r > p\}$$

也是一开集．从而 $g^{-1}[(p, q)]$ 也是开集．所以 g 是连续的显然 $g(F_1) = \{0\}, g(F_2) = \{1\}$.]

6.6.4 现在证明正规性的充分条件．

定理 仿紧的 Hausdorff 空间是正规的．

证明 首先证明仿紧的 Hausdorff 空间是正则的．设 p 是仿紧 Hausdorff 空间 X 的一点．F 是不含 p 的闭子集．因为 X 是 Hausdorff 的，故对于 F 的每一点 x，存在不交开集 U_x 及 V_x，使 $p \in U_x, x \in V_x$，考虑集 $X - F$ 及一切这样的开集 V_x 所成的开覆盖，根据 X 的仿紧性，存在局部有限开加细 $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$．设 V 是与 F 相交的一切 V_α 之并．当然，V 是包含 F 的开集．根据假设，存在开集 $W \ni p$，只和 $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ 中的有限个

$$V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \cdots, V_{\alpha_n}$$

相交．每个和 F 相交的 V_{α_i} 必含于某一 $V_{x_i}, x_i \in F$，选取对应的 U_{x_i}，令

$$U = W \cap [\cap\{U_{x_i} : x_i \in F \text{ 而 } V_{x_i} \cap U_{x_i} = \phi\}],$$

则 U 是包含点 p 而与 F 不交的开集．

其次证明 X 是正规的．设 F_1 及 F_2 是 X 的两个不交闭集．由上面所证，对于 F_1 的每一点 x，存在不交开集 U_x 及 V_x, $x \in U_x$ 而 $F_2 \subset V_x$．考虑由此种开集 U_x 及 $X - F_1$ 所成的开覆盖．根据仿紧性，存在局部有限开加细 $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$．以 U 表示与 F_1 相交的一切 U_α 之并，则 U 是包含 F_1 的开集．此时，对于 F_2 的每一点 y，存在开集 W_y，只和 $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ 中的有限个

$$U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_n}$$

相交．且对于每个 α_i，存在 U_{x_i}，使 $U_{\alpha_i} \subset U_{x_i}, x_i \in F_1$．取与

之不交的$V_{x_i}\supset F_2$．令

$$K_y=W_y\cap[\cap\{V_{x_i}:x_i\in F_1.V_{x_i}\cap U_{x_i}=\phi\}],$$

则K_y是包含点y与U不相交的开集．以V表示一切这些开集K_y的并，则V是包含F_2的与U不交的开集.]

定理 正则的 Lindelöf 空间是正规的．

证明 设F及F^*是正则Lindelöf空间X的两个不交的闭子集，需证存在两个不交的开集$G\supset F$及$G^*\supset F^*$．易证F及F^*都是Lindelöf的子空间．根据正则条件，对于每一点$x\in F$，存在开集G_x，使得$x\in G_x\subset\bar{G}_x\subset X-F^*$．于是，开集族$\{G_x:x\in F\}$是Lindelöf集合$F$的开覆盖，故存在一可数子覆盖$\{G_i\}$．类似地，对于每一点$x\in F^*$，存在开集$G_x^*$，使$x\in G_x^*\subset\overline{G_x^*}\subset X-F$．开集族$\{G_x^*:x\in F^*\}$是$F^*$的开覆盖，它有一可数子覆盖$\{G_i^*\}$．不难验证

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}[G_n-\cup_{i\leqslant n}\overline{G_i^*}]$$

及

$$G^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}[G_n^*-\cup_{i\leqslant n}\overline{G_i}]$$

是不交的开集，分别包含闭集F及F^*.]

§7 全正规空间与全正则空间

6.7.1 定义 拓扑空间X称为全正规的当且仅当满足全正规条件：如果A及B是X的分离子集，则存在两个不交开集，一个包含A，另一个包含B．

全正规的T_1空间称为T_5空间．

由于不交闭集是分离的，因此，全正规空间是正规空间，

T_5 空间是 T_4 空间.

由下述定理可见,全正规空间又可称为遗传正规空间.

定理 拓扑空间X是全正规的,当且仅当 X 的每个子空间是正规的.

证明 设X是全正规的,Y是X的子空间. A及B是Y的不交闭集. 由于 A,B都闭于Y,

$$A\cap\bar{B}=(\bar{A}\cap Y)\cap\bar{B}=(\bar{A}\cap Y)\cap(\bar{B}\cap Y)=A\cap B=\phi,$$

同理

$$\bar{A}\cap B=\phi.$$

故A及B在空间X中是分离的. 根据X的全正规性,存在开集$O_A\supset A$,$O_B\supset B$, $O_A\cap O_B=\phi$. 故$O_A\cap Y$及$O_B\cap Y$是Y中的不交开集,且$O_A\cap Y\supset A$, $O_B\cap Y\supset B$. 所以Y是正规的.

今设X的每个子空间Y都是正规的,我们来证X是全正规的. 设A及B为X的分离子集,$A\cap\bar{B}=\phi$,$\bar{A}\cap B=\phi$. 考虑子空间$Y=(\bar{A}\cap\bar{B})^c$. 集合$\bar{A}\cap Y$及$\bar{B}\cap Y$是Y的闭集,它们不相交,因为

$$(\bar{A}\cap Y)\cap(\bar{B}\cap Y)=(\bar{A}\cap\bar{B})\cap Y=$$
$$=(\bar{A}\cap\bar{B})\cap(\bar{A}\cap\bar{B})^c=\phi.$$

由于Y是正规的,故存在子空间Y的不交开集O_A及O_B,使$O_A\supset\bar{A}\cap Y$, $O_B\supset\bar{B}\cap Y$. 由于$Y=(\bar{A}\cap\bar{B})^c$开于X,故O_A及O_B也是X的开集. 而且$A\subset O_A$,$B\subset O_B$. 因为

$$\bar{A}\cap Y=\bar{A}\cap(\bar{A}\cap\bar{B})^c=(\bar{A}\cap\bar{A}^c)\cup(\bar{A}\cap\bar{B}^c)=$$
$$=\bar{A}\cap\bar{B}^c\supset A\cap\bar{B}^c=A,$$

同理,$\bar{B}\cap Y\supset B$. 所以,X的不交开集O_A和O_B分别包含A及B.]

6.7.2 定义 拓扑空间X称为是全正则的,当且仅当它满足全正则条件:如果F是X的闭集,x是X的不属于F的

点，则存在连续映射

$$f: X \longrightarrow [0,1],$$

使得 $f(x)=0$ 而 $f(F)=\{1\}$.

全正则的 T_1 空间称为 Тихонов 空间。

全正则性质既是拓扑性质又是遗传性质。显然，全正则空间是正则的．而 Тихонов 空间则是 T_3 空间，根据 6.6.3 的定理，T_4 空间是 Тихонов 空间．由于有这些关系，我们可把 Тихонов 空间称为 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间．

6.7.3 定理 正规空间是全正则的，当且仅当它是正则的．

证明 只需证明正规且正则的空间 X 是全正则的．设 F 是 X 的不含点 x 的闭集，故 $x \in X-F$．从 6.6.1 的定理可知，存在一开集 G，使得

$$x \in G \subset \bar{G} \subset X-F,$$

由于 F 及 $\bar{G}$ 是正规空间 X 的不交闭集，故由 6.6.3 的定理，存在连续映射

$$f: X \longrightarrow [0,1],$$

使 $f(F)=\{1\}$，$f(\bar{G})=\{0\}$．由于 $x \in G$，则 $f(x)=0$，因而 X 是全正则的．】

习　题

1．证明：T_0 空间是拓扑不变的，T_1 空间也是拓扑不变的。

2．证明：在 T_1 空间内，有限集没有极限点。

3．证明：在 T_1 空间内，包含多于一点的连通集必是无限集。

4．直接根据 T_1 空间的定义证明 6.1.3 的定理

5．证明：T_1 空间的单点紧化空间是 T_1 空间。

6．设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，$\mathscr{T}^* \leqslant \mathscr{T}$．证明如果 $(X, \mathscr{T})$ 是 T_0 空间，则 $(X, \mathscr{T}^*)$ 是 T_0 空间；如果 $(X, \mathscr{T})$ 是 T_1 空间，则 $(X, \mathscr{T}^*)$ 也是 T_1 空

间.

7. 证明：T_2 空间是拓扑不变的.

8. 证明：T_2 空间是遗传的.

9. 如果$(X, \mathscr{T})$是 T_2 空间，而$\mathscr{T}^* \leqslant \mathscr{T}$. 证明$(X, \mathscr{T}^*)$是 T_2空间.

10. 证明：如果$(X, \mathscr{T}_1)$是 Hausdorff 空间，$(X, \mathscr{T}_2)$是紧空间，且$\mathscr{T}_1 \geqslant \mathscr{T}_2$，则$\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.

11. 证明：第一可数性是拓扑不变的.

12. 证明：第一可数性是遗传性质.

13. 证明：第二可数性是拓扑性质.

14. 证明：第二可数性是遗传性质.

15. 证明：第二可数空间是第一可数空间.

16. 证明：Lindelöf 空间是连续映射不变的.

17. 证明：Lindelöf 空间的闭子集是 Lindelöf 空间.

18. 证明：可分空间的连续象仍是可分空间.

19. 证明：6.5.2 的 Appert 空间是可分空间，是 Lindelöf 空间.

20. 证明：可分第一可数空间遗传可分.

21. 证明：正则性是拓扑性质，是遗传性质.

22. 证明：正则的 T_0 空间是 T_3 空间.

23. 证明：正规性是拓扑性质.

24. 证明：局部紧的有可数基的 Hausdorff 空间是正规的.

25. 证明：有可数基的正则空间是正规的.

26. 证明：全正规性是拓扑性质.

27. 证明：全正则性是拓扑性质，是遗传性质.

28. 如果 x 及 y 是 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间的相异点，证明存在实值连续映射 f，使$f(x) \neq f(y)$.

29. 在 E^2 上定义基本邻域族$\mathscr{S}$的元素为

$$\{(x, y): a \leqslant x < b, c \leqslant y < d\},$$

拓扑空间$(E^2, \mathscr{S})$称为 Sorgenfrey 平面. 证明此空间是可分的，非 Lindelöf 的，Hausdorff 的.

30. 设 X 是 Hausdorff 空间，$C \subset X$ 是紧子集，$p \notin C$. 证明存在不交开集，其一包含点 p，另一包含 C.

31．设 X 是 Hausdorff 空间，$H,K\subset X$ 是两不交紧集，证明存在两不交开集，其一包含 H，另一包含 K．

32．证明：拓扑空间 X 是正规的，当且仅当 X 的每一有限开覆盖具有有限闭加细．

33．设 X 是一全序集，$\mathscr{T}$ 为在 X 上的序拓扑(见第二章习题 13)，证明$(X,\mathscr{T})$是全正规的．

34．证明：第一可数的可数紧空间是序列紧的(见第五章习题 11)．

第七章　度量空间

§1　度量空间

7.1.1　度量空间，是拓扑空间的最重要的类型．这是比欧氏空间较广的一种特殊的拓扑空间．因此，在度量空间的基础上，更易于理解拓扑空间，在度量空间的基础上，更便于深入理解欧氏空间．本章专门研究度量空间．

定义　设X是一个集合，d是从$X\times X$到非负实数集的映射，如果对于一切$x, y, z\in X$，满足条件：

[M.1]　$d(x, x)=0$；

[M.2]　$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$；

[M.3]　$d(x, y)=d(y, x)$；

[M.4]　$x\neq y$蕴涵$d(x, y)>0$；

则d称为集X的度量，而$d(x, y)$称为点x及y之间的距离．

如果d只满足条件[M.1]，[M.2]，[M.3]，则d称为X的伪度量；如果d只满足条件[M.1]，[M.2]，[M.4]，则d称为拟度量；如果d只满足条件[M.1]及[M.2]，则d称为拟伪度量．本书只限于研究度量．

例如，在数直线E^1中，定义两数x及y之间的距离为$d(x, y)=|x-y|$．根据绝对值的性质，不难验证，映射d满足上述四条件，故d为E^1的度量．

又如，在欧氏平面E^2中，定义两点$(x_1, y_1)=x$及$(x_2,$

$y_2)=y$ 之间的距离为

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

显然满足上述四条件。第二个条件相当于说三角形两边之和大于第三边，故第二个条件可称为"三角不等式"。故 d 是 E^2 的度量。

在 E^1 与 E^2 中，除了上述度量外，还可能有其他的度量．例如，当 $x=y$ 时，令 $d(x,x)=0$；而当 $x\neq y$ 时，令 $d(x,y)=1$，则这样定义的映射 d 仍是度量。所以，对于同一个集合，其度量可能有多种。

一个集合的度量的重要意义就在于可以利用它来确定拓扑。如果 x 是具有度量 d 的集 X 的一点，而 ε 是任一正实数，则使得 $d(x,y)<\varepsilon$ 的一切点 $y\in X$ 的集合称为以 x 为中心、以 ε 为半径的球或球邻域，记为 $B(x,\varepsilon)$，即

$$B(x,\varepsilon)=\{y;\, y\in X,\, d(x,y)<\varepsilon\}.$$

7.1.2 定理 在一具有度量 d 的集合 X 中，一切点的一切球邻域的族是 X 上的一个拓扑。

证明 显然，X 的每一点均有包含该点的球邻域，例如 $x\in B(x,\varepsilon)$。

又，如果 $x\in B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2)$，则 $d(x_1,x)<\varepsilon_1$，$d(x_2,x)<\varepsilon_2$。故 $\varepsilon_1-d(x_1,x)>0$，$\varepsilon_2-d(x_2,x)>0$。设 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1-d(x_1,x),\varepsilon_2-d(x_2,x)\}$，我们来证明

$$B(x,\varepsilon)\subset B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2).$$

设 $y\in B(x,\varepsilon)$，则

$$\begin{aligned}d(y,x_1)&\leqslant d(y,x)+d(x,x_1)<\varepsilon+d(x,x_1)\\&\leqslant\varepsilon_1-d(x,x_1)+d(x,x_1)=\varepsilon_1;\\d(y,x_2)&\leqslant d(y,x)+d(x,x_2)<\varepsilon+d(x,x_2)\\&\leqslant\varepsilon_2-d(x,x_2)+d(x,x_2)=\varepsilon_2.\end{aligned}$$

故

$$B(x,\varepsilon)\subset B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2).]$$

7.1.3 由上述定理可知，如果X是一个具有度量d的集合，则一切球邻域的族是X上的一个拓扑，此拓扑称为度量d诱导的拓扑。以X为基集，以X的度量d所诱导的拓扑结构为拓扑结构的拓扑空间就称为度量空间，简记为(X,d)。因此，度量空间是一种拓扑空间，不过它的拓扑是由度量诱导的。

不同的度量可能诱导出等价的拓扑。例如，在欧氏平面E^2中，下面两度量

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$d^*((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$$

诱导出等价的拓扑。因为度量d的球邻域$B(x,\varepsilon)$是半径为ε的圆，而度量d^*的球邻域$B^*(x,\varepsilon)$则是边长为2ε的正方形。显然，$B(x,\varepsilon)\subset B^*(x,\varepsilon)$而$B^*\left(x,\frac{1}{2}\varepsilon\right)\subset B(x,\varepsilon)$。可见$d$和$d^*$诱导出的拓扑是等价的。诱导出等价拓扑的度量称为是等价的度量。问题是，对于给定的拓扑空间$(X,\mathscr{T})$，是否存在X上的度量d，使得d诱导的拓扑与$\mathscr{T}$等价？如果这样的度量d存在，我们称拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是可度量的。研究可度量的拓扑空间，是拓扑学的重大课题。本章只提供一个引论。

§2 度量空间的拓扑性质

7.2.1 定理 度量空间是Hausdorff空间。

证明 设x及y是度量空间(X,d)的两个相异的点，则$d(x,y)>0$。设ε是一正实数，满足条件$0<\varepsilon<\frac{d(x,y)}{2}$。

则 $B(x,\varepsilon)$ 及 $B(y,\varepsilon)$ 是分别包含 x 及 y 的开集．我们断言，$B(x,\varepsilon)$ 及 $B(y,\varepsilon)$ 不相交．假设相反，$z\in B(x,\varepsilon)\cap B(y,\varepsilon)$，于是

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)=$$
$$=d(x,z)+d(y,z)<\varepsilon+\varepsilon<d(x,y),$$

这是不可能的．所以，这两个开集不相交．]

定理 度量空间是全正规的．

证明 设 A 及 B 为度量空间 (X,d) 的两个分离子集．对于 A 的每一点 x 及 B 的每一点 y，由于 $x\notin\bar{B}$，$y\notin\bar{A}$，故必存在 $\varepsilon_x>0$ 及 $\varepsilon_y>0$，使

$$B(x,\varepsilon_x)\cap B=\phi,$$
$$B(y,\varepsilon_y)\cap A=\phi.$$

我们来证明，开集

$$G_A=\bigcup\left\{B\left(x,\frac{\varepsilon_x}{2}\right):x\in A\right\}$$

及开集

$$G_B=\bigcup\left\{B\left(y,\frac{\varepsilon_y}{2}\right):y\in B\right\}$$

不相交．假设 $z\in G_A\cap G_B$，则存在一点 $x\in A$ 及 $y\in B$，使 $z\in B\left(x,\frac{\varepsilon_x}{2}\right)$，且 $z\in B\left(y,\frac{\varepsilon_y}{2}\right)$，因而

$$d(x,z)<\frac{\varepsilon_x}{2},$$

$$d(y,z)<\frac{\varepsilon_y}{2},$$

而

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)<\frac{\varepsilon_x}{2}+\frac{\varepsilon_y}{2}.$$

于是当 $\varepsilon_y\leqslant\varepsilon_x$ 时，$d(x,y)<\varepsilon_x$，故 $y\in B(x,\varepsilon_x)$；当 $\varepsilon_x\leqslant\varepsilon_y$ 时，

$d(x, y)<\varepsilon_y$，故 $x\in B(y, \varepsilon_y)$. 无论何种情形，都是不可能的. 所以，G_A 与 G_B 不相交.]

定理 度量空间是第一可数的.

证明 设 x 是度量空间 (X, d) 的一点，如果对于每一自然数 n，令 $B_n(x)=B\left(x, \frac{1}{n}\right)$，我们便得到包含点 x 的可数开集族. 今设 x 含于某一开集 G，则存在一正数 ε，使得 $B(x, \varepsilon)\subset G$. 于是，只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，便有 $B_n(x)\subset G$，因而 X 是第一可数的.]

7.2.2 从第六章知道第二可数空间必是可分的，Lindelöf 的. 现在，我们来证明相反的情形.

定理 可分度量空间是第二可数的.

证明 设 (X, d) 是可分的度量空间，且 $E=\{x_n\}$ 是 X 的可数稠密子集. 我们断言球邻域族

$$\left\{B\left(x_n, \frac{1}{k}\right): n, k\text{ 都是自然数}\right\}$$

是拓扑的可数开基. 我们只须证明，对于每一含于开集 G 的点 x，存在族中的球域，包含点 x 而含于 G. 根据开集的定义，必存在一球邻域

$$B(x, \varepsilon)\subset G.$$

取 $\frac{1}{k}<\frac{\varepsilon}{2}$，即 $k>\frac{2}{\varepsilon}$. 由于 $\bar{E}=X$，故必存在 $x_n\in B\left(x, \frac{1}{k}\right)$，即 $d(x, x_n)<\frac{1}{k}$，显见 $x\in B\left(x_n, \frac{1}{k}\right)$. 现在证明 $B\left(x_n, \frac{1}{k}\right)\subset G$. 设 $y\in B\left(x_n, \frac{1}{k}\right)$，即 $d(y, x_n)<\frac{1}{k}$，而

$$d(x, y)\leqslant d(x, x_n)+d(x_n, y)<\frac{2}{k}<\varepsilon,$$

于是 $y\in B(x,\varepsilon)\subset G$. 所以, $B\left(x_n, \frac{1}{k}\right)\subset G$.]

定理 Lindelöf 度量空间是第二可数的.

证明 设 (X,d)是 Lindelöf 的度量空间,对于任一固定的自然数 k,球邻域族

$$\left\{B\left(x, \frac{1}{k}\right): x\in X\right\}$$

是 X 的开覆盖. 根据 Lindelöf 性质,必存在一可数子覆盖

$$\left\{B\left(x_n^{(k)}, \frac{1}{k}\right): n \text{ 是自然数}\right\}.$$

我们断言,球邻域族

$$\left\{B\left(x_n^{(k)}, \frac{1}{k}\right): n, k \text{ 是自然数}\right\}$$

是拓扑的可数开基. 设点 x 是开集 G 的任一点, 根据开集的定义,存在一ε,使 $B(x,\varepsilon)\subset G$. 选取$\frac{1}{k}<\frac{\varepsilon}{2}$, 即 $k>\frac{2}{\varepsilon}$,对于这样的 k 值,

$$\left\{B\left(x_n^{(k)}, \frac{1}{k}\right): n\in N\right\}$$

是X的开覆盖,故存在一自然数 n,使得 $x\in B\left(x_n^{(k)}, \frac{1}{k}\right)$. 现在证明 $B\left(x_n^{(k)}, \frac{1}{k}\right)\subset G$. 设 $y\in B\left(x_n^{(k)}, \frac{1}{k}\right)$,则

$$d(x,y)\leqslant d(x,x_n^{(k)})+d(x_n^{(k)},y)<\frac{2}{k}<\varepsilon.$$

因而 $y\in B(x,\epsilon)\subset G$. 所以, $B\left(x_n^{(k)}, \frac{1}{k}\right)\subset G$.]

又由于 6.4.3 的定理和 6.5.1 的定理,我们推知,对于度量空间,具有可数基性, 可分性以及 Lindelöf 性三者是等价的. 又由于紧空间必是 Lindelöf 空间, 故紧的度量空间必是

可分的，必是第二可数的。

7.2.3 现在来进一步研究度量空间的紧性。

定义 设 E 是度量空间 (X, d) 的子集，E 的有限子集 F 称为 E 的 ε 网，当且仅当

$$E \subset \bigcup\{B(x, \varepsilon) : x \in F\}.$$

当且仅当对于任一正数 ε，集 E 均有 ε 网，E 称为完全有界的。

定理 可数紧的度量空间是完全有界的。

证明 用反证法，设可数紧的度量空间 (X, d) 不是完全有界的，则对于某一正数 ε，X 没有 ε 网。设 x_1 是 X 的任一点，由于 X 没有 ε 网，故存在一点 $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon)$，即 $d(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$；$\{x_1, x_2\}$ 仍不能是 X 的 ε 网，故存在一点 x_3，$x_3 \notin B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$，即 $d(x_1, x_3) \geqslant \varepsilon$，$d(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$；$\{x_1, x_2, x_3\}$ 仍不可能是 X 的 ε 网，故存在一点 $x_4 \notin B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup B(x_3, \varepsilon)$，即 $d(x_1, x_4) \geqslant \varepsilon$，$d(x_2, x_4) \geqslant \varepsilon$，$d(x_3, x_4) \geqslant \varepsilon$；如此继续下去，可知存在一无限子集 $\{x_1, x_2, x_3, x_3, \cdots\}$，当 $i \neq j$ 时，$d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$。由于 X 是可数紧的，$\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是 X 的一个无限子集，故根据 5.2.2 的定理，它有一聚点 $x \in X$，故 $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ 包含 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 的无限多个点。例如设 x_i，$x_j \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$，则 $d(x_i, x_j) < \varepsilon$，这就同 $d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ 矛盾。所以，X 是完全有界的。]

定理 可数紧的度量空间是可分的。

证明 由于可数紧度量空间 (X, d) 是完全有界的，故对于每一自然数 n，存在 X 的 $\frac{1}{n}$-网 $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k(n)}^{(n)}\}$。一切

这些$\frac{1}{n}$-网的并集 E 是一个可数集，我们断言，$\bar{E}=X$. 只须证明，对于X的任一点 x 及任一正数 ε, $B(x,\varepsilon)$ 必含有 E 的点. 为此，取$\frac{1}{n}<\varepsilon$，考虑X的$\frac{1}{n}$-网，则 E 中必有一点 $x_i^{(n)}$ $\left(\text{属于}\frac{1}{n}\text{-网的一点}\right)$，使得 $x\in B\left(x_i^{(n)},\frac{1}{n}\right)$，即 $d(x,x_i^{(n)})<\frac{1}{n}<\varepsilon$，故 $x_i^{(n)}\in B(x,\varepsilon)$.]

定理 可数紧的度量空间是紧的.

证明 由前述定理可知，可数紧的度量空间是可分的，因而是 Lindelöf 的. 所以，可数紧度量空间的任一开覆盖必有可数子覆盖. 既然是可数紧的，故必有一有限子覆盖. 因而可数紧度量空间是紧的.]

又因为紧空间当然是可数紧的，所以，对于度量空间，紧与可数紧是等价的.

§ 3 可度量的拓扑空间

7.3.1 在什么条件下，一个拓扑空间是可度量的？ 这是一个很重要的问题. 为了回答这个问题，我们先简单介绍一下 Hilbert 空间的概念.

Hilbert 空间不过是 n 维欧氏空间的自然推广. 所谓 n 维欧氏空间 E^n，是 n 个有序实数组 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的集合，其度量 d 定义为

$$d(x,y)=d((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n))=$$
$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

实数 x_i 称为点$(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$的第 i 坐标.

定义 在一切使得 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2$ 收敛的实数无限序列 $x=$

$(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots)$的集合$H$上定义度量$d$：

$$d(x, y)=d((x_1, x_2, \cdots), (y_1, y_2, \cdots))$$
$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2},$$

则度量空间(H, d)称为 Hilbert 空间。

我们注意，Hilbert 空间不过是可数个 E^1 之积的积空间（见 Bulletin of the A.M.S., Vol 74, No.5, 1968 年, R. D. Anderson 及 R. H. Bing 的证明）。

7.3.2 定理 有可数基的 T_3 空间是可度量的。

证明 我们来证明有可数基的 T_3 空间X同胚于Hilbert空间的一个子集．设X的可数基为不空的开集族$\{G_n: n\in N\}$，对于族$\{G_n\}$中的每一个开集G_j，考虑其中一点$x\in G_j$，由正则性可知必有一开集G，使$x\in G\subset\bar{G}\subset G_j$。由于$\{G_n\}$是基，故必有一开集$G_i$，使$x\in G_i\subset G$。因此，$\bar{G}_i\subset G_j$，于是得到两个不交闭集$\bar{G}_i$及$X-G_j$。因为有可数基的正则空间是正规的（见 6.6.4），故由 6.6.3 的定理可知，存在一连续映射

$$f_j: X\to[0,1],$$

使得

$$f_j(\bar{G}_i)=\{0\}, f_j(X-G_j)=\{1\}.$$

于是，我们证明了，对于每一个自然数 j，存在一连续映射 f_j。

现在，我们可将从X到 Hilbert 空间的嵌入映射 f 定义如下：对于每个 $x\in X$，

$$f(x)=\left(\frac{f_1(x)}{2}, \frac{f_2(x)}{2^2}, \cdots, \frac{f_n(x)}{2^n}, \cdots\right).$$

今证明 $f(x)$是一嵌入映射，也就是说，$f(x)$是从X到 $f(X)$的同胚。

设 x 和 y 是X的两个不同的点．由于X是 T_1 空间，故存在一自然数 j，使得 $x\in G_j$ 而 $y\in X-G_j$。如上所述，存在一

自然数i,使得

$$x\in G_i\subset\overline{G}_i\subset G_j.$$

故$f(x)$的第j个坐标是$f_j(x)/2^j=0$,而$f(y)$的第j个坐标是$f_j(y)/2^j=1/2^j\neq 0$, 因为$y\in X-G_j$。于是$f(x)\neq f(y)$,故f是一一的.

又设x^*是X的一定点,ε是任一正数. 首先选取N, 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

对于每一个满足条件$1\leqslant n\leqslant N$的n,映射f_n是连续的,因而存在一包含x^*的基集G_{k_n},只要$x\in G_{k_n}$,便有

$$|f_n(x^*)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}.$$

以G表示$\bigcap_{n=1}^{N}G_{k_n}$, 它是包含点x^*的开集. 如果$x\in G$, 则对于$n=1,2,\cdots,N$, $x\in G_{k_n}$,因而

$$d(f(x^*),f(x))=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(x^*)/2^n-f_n(x)/2^n]^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^{2n}}|f_n(x^*)-f_n(x)|^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}|f_n(x^*)-f_n(x)|^2}$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|f_n(x^*)-f_n(x)|^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}}$$

$$<\sqrt{N\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2N}}\right)^2+\frac{\epsilon^2}{2}}=\varepsilon.$$

于是f是连续的.

最后, 设G是X的任一开子集, 我们来证明$f(G)$是

$f(X)$的开子集．设 y 是 $f(G)$的任一点，对于某一$x\in G$，$y=f(x)$．如上所述，设

$$x\in G_i\subset\bar{G}_i\subset G_j\subset G,$$

则 $f_j(x)=0$ 而 $f_j(X-G)=\{1\}$．因而对于每一点 $t\in X-G$，$f(x)$与 $f(t)$的第 j 个坐标的差等于$\frac{1}{2^j}$，故

$$d(f(x),f(t))\geqslant\frac{1}{2^j}.$$

也就是说，

$$f(X-G)\cap B(f(x),1/2^j)=\phi.$$

因此，$y\in B(y,1/2^j)\cap f(X)\subset f(G)$．故 $f(G)$ 是 $f(X)$ 的开子集．由于 f 是一一的连续开映射，故 f 是同胚．]

7.3.3 我们要注意，在上述定理中，"有可数基"的条件不是必要的．事实上，它可减弱为"有至多可数个局部有限开集族所成的基"．为了说起来方便，把至多可数个局部有限开集族所成的基称为 σ 局部有限基．换言之，我们有定理（Nagata-Смирнов）．

定理 拓扑空间X是可度量的当且仅当它是具有 σ 局部有限基的 T_3 空间．

为了证明这一定理，需要做好准备工作．

首先，我们来推广 Hilbert 空间以得到广义的 Hilbert 空间．

设 Λ 是一个集合，其基数为 τ（τ至少是可数的）．设 f 是定义在 Λ 上的实值映射，$f(\lambda)$ 最多在 Λ 的一个可数子集上异于零，且级数

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}[f(\lambda)]^2$$

收敛．一切这样的映射 f 的集合记为 H^τ．在 H^τ 上的度量

定义为

$$d^{\tau}(f,g)=\sqrt{\sum_{\lambda\in\Lambda}[f(\lambda)-g(\lambda)]^2}.$$

如此得到的度量空间(H^{τ},d^{τ})称为权为τ的广义 Hilbert 空间.

其次,对于局部有限的集族$\mathscr{E}=\{E_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$,取它的每一集$E_\lambda$的闭包,则这些闭包的集族$\overline{\mathscr{E}}=\{\overline{E}_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$仍是局部有限的. 而且对于任意子集$\Gamma\subset\Lambda$,

$$\overline{\bigcup\{E_\gamma:\gamma\in\Gamma\}}=\bigcup\{\overline{E}_\gamma:\gamma\in\Gamma\}.$$

因为,如果开集G不与集E_λ相交,则G仍不与$\overline{E}_\lambda$相交. 所以,集族$\overline{\mathscr{E}}$仍为局部有限. 又由于$E_\gamma\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}E_\gamma$,故$\overline{E}_\gamma\subset\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}E_\gamma}$,因而

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{E}_\gamma\subset\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}E_\gamma},$$

故需证

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}E_\gamma}\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{E}_\gamma.$$

设$x\in\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}E_\gamma}$, 则只有有限个$\gamma(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$,使$x\in\overline{E_{\gamma_1}\cup E_{\gamma_2}\cup\cdots\cup E_{\gamma_n}}$,而

$$\overline{E_{\gamma_1}\cup E_{\gamma_2}\cup\cdots\cup E_{\gamma_n}}=\overline{E}_{\gamma_1}\cup\overline{E}_{\gamma_2}\cup\cdots\cup\overline{E}_{\gamma_n}\subset\bigcup\{\overline{E}_\gamma:\gamma\in\Gamma\},$$

所以得

$$\overline{\bigcup\{E_\gamma:\gamma\in\Gamma\}}=\bigcup\{\overline{E}_\gamma:\gamma\in\Gamma\}.$$

7.3.4 在证明一般的可度量条件前,先来证明几条引理.

引理 1 具有σ局部有限基的T_3空间的每个开集都是可数个闭集之并.

证明 设X是T_3空间,有σ局部有限基

$$\{B_{n,\lambda}: n\in N, \lambda\in\Lambda_n\}.$$

又设 G 是 X 的一个开集. 根据正则性,对于每一点 $x\in G$, 存在一包含 x 的开集,其闭包含于 G. 因此,在 σ 局部有限基中存在 $B_{n(x),\lambda(x)}$,包含 x,其闭包含于 G 中. 又由于对每一整数 k,

$$\{B_{k,\lambda}:\lambda\in\Lambda_k\}$$

是局部有限的,故如设 $B_k=\bigcup\{B_{k,\lambda(x)}:x\in G, \lambda(x)\in\Lambda_k\}$, 则 $\bar{B}_k=\bigcup\{\bar{B}_{k,\lambda(x)}:x\in G, \lambda(x)\in\Lambda_k\}\subset G$. 这样一来,$G=\bigcup\{\bar{B}_k: k\in N\}$. 因而 G 是可数个闭集之并.]

引理 2 有 σ 局部有限基的 T_3 空间是正规的.

证明 设 T_3 空间 X 有 σ 局部有限基

$$\{B_{n,\lambda}: n\in N, \lambda\in\Lambda_n\},$$

F 及 K 是 X 的不交闭集. 如上所述,对于每一点 $x\in F$, 存在基集 $B_{n(x),\lambda(x)}$ 包含 x, 其闭包含于 $X-K$, 又对于每一点 $y\in K$,存在基集 $B_{n(y),\lambda(y)}$包含 y,其闭包含于 $X-F$. 如设

$$B_{k,F}=\bigcup\{B_{k,\lambda(x)}:x\in F, \lambda(x)\in\Lambda_k\},$$

$$B_{k,K}=\bigcup\{B_{k,\lambda(y)}:y\in K, \lambda(y)\in\Lambda_k\},$$

则根据局部有限性,

$$\bar{B}_{k,F}=\bigcup\{\bar{B}_{k,\lambda(x)}:x\in F, \lambda(x)\in\Lambda_k\}\subset X-K,$$

$$\bar{B}_{k,K}=\bigcup\{\bar{B}_{k,\lambda(y)}:y\in K, \lambda(y)\in\Lambda_k\}\subset X-F.$$

于是开集

$$G_{n,F}=B_{n,F}-\bigcup_{k\leqslant n}\bar{B}_{k,K}$$

$$G_{n,K}=B_{n,K}-\bigcup_{k\leqslant n}\bar{B}_{k,F}$$

分别包含使 $n(x)=n$ 的每一点 $x\in F$,及使 $n(y)=n$ 的每一点 $y\in K$. 最后令

$$G_F=\bigcup\{G_{n,F}:n\in N\},$$
$$G_K=\bigcup\{G_{n,K}:n\in N\},$$
则它们分别是包含F及K的不交开集.]

引理 3 设E是正规空间X的开集,如果E是可数个闭集之并,则存在连续映射

$$f:X\longrightarrow[0,1],$$

使得$X-E=f^{-1}(0)$,即当且仅当$x\in E$时,$f(x)>0$.

证明 设$E=\bigcup\{F_n:n\in N\}$是X的开集,于是$X-E$是闭集,对于任意自然数n,$X-E$与F_n不交.因而根据6.6.3的定理,可知存在连续映射$f_n:X\to[0,1]$,使得$f_n(X-E)=\{0\}$,$f_n(F_n)=\{1\}$.令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f_n(x),$$

显然,$f:X\to[0,1]$,而且当$x\in X-E$时,由于每个$f_n(x)$都等于0,因而$f(x)$也等于0.又当$x\notin X-E$时,由于$x\in E$而x必属于某一闭集F_k,故$f_k(x)=1$,因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f_n(x)$$

中至少第k项为$\frac{1}{2^k}$,故$f(x)>0$.

还需证明$f(x)$是连续映射.固定X的一点x^*,设ε是任一正数,存在自然数N,使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于每一个满足$1\leqslant n\leqslant N$的自然数n,f_n是连续的,因而存在一开集G_n包含点x^*,只要$x\in G_n$,便有

$$|f_n(x^*)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2N}.$$

设 $G=\bigcap_{n=1}^{N}G_n$，它是包含 x^* 的一个开集，只要 $x\in G$，

$$|f(x^*)-f(x)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|f_n(x^*)-f_n(x)|$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}|f_n(x^*)-f_n(x)|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$|f_n(x^*)-f_n(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{N}|f_n(x^*)-f_n(x)|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$<N\frac{\varepsilon}{2N}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以，$f(x)$是连续的.]

7.3.5 现在我们来着手证明可度量条件的充分性.

定理 如果 T_3 空间有一 σ 局部有限基，则它是可度量的.

证明 设 T_3 空间 X 有一 σ 局部有限基为

$$\{B_{n,\lambda}:n\in N,\lambda\in\Lambda_n\},$$

以 Λ 表示集合$\{(n,\lambda):n\in N,\lambda\in\Lambda_n\}$. 设 Λ 的基数为 τ. 我们来证明 X 同胚于 H^τ 的子集.

根据上面的引理，对于每一对$(n,\lambda)\in\Lambda$，存在一连续映射 $f_{n,\lambda}:X\to[0,1]$使得

$$f_{n,\lambda}(x)>0,\text{当且仅当 }x\in B_{n,\lambda}.$$

因为对于每一确定的 n，开集族$\{B_{n,\lambda}:\lambda\in\Lambda_n\}$是局部有限的，因而对于每一点 $x\in X$，至多有有限个 λ 的值使得 $f_{n,\lambda}(x)\neq0$. 因此，$1+\sum_\beta f_{n,\beta}^2(x)$ 是不小于 1 的 X 的连续映射. 由

此，我们又可定义一连续映射 $g_{n,\lambda}: X \longrightarrow [0,1]$ 为

$$g_{n,\lambda}(x)=\frac{f_{n,\lambda}(x)}{\sqrt{1+\sum_\beta f_{n,\beta}^2(x)}}.$$

可见，当且仅当 $x\in B_{n,\lambda}$ 时，$g_{n,\lambda}(x)>0$. 并且，对于一确定的自然数 n，及一确定的点 $x\in X$，最多有有限个 λ 的值使得 $g_{n,\lambda}(x)\neq 0$. 显然，$\sum_\lambda g_{n,\lambda}^2(x)<1$，且容易验证对于一切 x，$y\in X$，$\sum_\lambda[g_{n,\lambda}(x)-g_{n,\lambda}(y)]^2<2$.

现在设 $h_{n,\lambda}(x)=\dfrac{g_{n,\lambda}(x)}{\sqrt{2^n}}$，显然，

$$\sum_{(n,\lambda)}h_{n,\lambda}^2(x)=\sum_n\frac{1}{2^n}\sum_\lambda g_{n,\lambda}^2(x)<\sum_n 2^{-n}=1.$$

于是，对于每一 $x\in X$，$h_{n,\lambda}(x)$ 是从 Λ 到实数的映射，在 Λ 的最多可数的子集上不为零，并且平方和的级数收敛. 根据权为 τ 的广义 Hilbert 空间的定义推知，对于每一个点 $x\in X$，

$$f(x)(n,\lambda)=h_{n,\lambda}(x),$$

则 $f(x)$ 是 H^τ 的一个点. 于是 f 是从 X 到 H^τ 的一个映射，我们要证明 f 是一个同胚.

如果 x 及 y 是 X 的两个不同的点，由于 X 是 T_1 空间，存在基本邻域 $B_{n,\lambda}$ 包含 x 而不包含 y. 由此推出 $h_{n,\lambda}(x)>0$ 而 $h_{n,\lambda}(y)=0$，故 $f(x)\neq f(y)$，从而 f 是一一的.

今设给定一点 $x\in X$ 及任一正数 ε. 首先选取自然数 N，使 $\dfrac{1}{2^N}<\dfrac{\varepsilon^2}{4}$. 根据局部有限性，存在一包含 x 的开集 G，对于 $n\leqslant N$，最多同有限个 $B_{n,\lambda}$ 相交. 设这些集记为 B_{n_i,λ_i}，$n_i\leqslant N$，$i=1,2,\cdots,k$. 对于每个 $(n,\lambda)\in\Lambda$，$h_{n,\lambda}$ 是连续的，因而存在包含 x 的开集 $G_{n,\lambda}$，使得对于每个 $y\in G_{n,\lambda}$，

$$|h_{n,\lambda}(x)-h_{n,\lambda}(y)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2k}}.$$

令

$$G^{*}=G\cap\left(\bigcap_{i=1}^{k}G_{n_i,\lambda_i}\right),$$

它是包含 x 的开集．我们要注意，对于 $y\in G^{*}$，如果 $(n,\lambda)\in\mathcal{A}$ 不同那些 (n_i,λ_i) 相等，则

$$h_{n,\lambda}(x)=h_{n,\lambda}(y)=0.$$

因而对于 $y\in G^{*}$，

$$\sum_{n\leqslant N,\lambda}[h_{n,\lambda}(x)-h_{n,\lambda}(y)]^2<k\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2k}}\right)^2=\frac{\varepsilon^2}{2},$$

而

$$\sum_{n>N,\lambda}[h_{n,\lambda}(x)-h_{n,\lambda}(y)]^2=\sum_{n>N}\frac{1}{2^n}\sum_{\lambda}[g_{n,\lambda}(x)$$

$$-g_{n,\lambda}(y)]^2\leqslant 2\sum_{n>N}\frac{1}{2^n}=\frac{2}{2^N}<2\frac{\varepsilon^2}{4}=\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

于是我们证明了，对于一切 $y\in G^{*}$，

$$d^{\tau}(f(x),f(y))=\sqrt{\sum_{n,\lambda}[h_{n,\lambda}(x)-h_{n,\lambda}(y)]^2}<\varepsilon.$$

因而 f 是连续的．

最后，设 $G\subset X$ 是任一开集，对于任一点 $x\in G$，存在 $(n,\lambda)\in\mathcal{A}$，使 $x\in B_{n,\lambda}\subset G$．以 δ 表示正实数 $h_{n,\lambda}(x)$．如果 $f(y)$ 是 $f(X)$ 的一点，满足条件

$$d^{\tau}(f(x),f(y))<\delta,$$

则 $h_{n,\lambda}(y)$ 也是正的，因而 $y\in B_{n,\lambda}\subset G$．所以

$$f^{-1}(B(f(x),\delta))\subset G.$$

由此推出 f 是同胚.]

7.3.6 上面我们证明了 T_3 及有 σ 局部有限基是可度量空间的充分条件，前面曾证明了 T_3 是可度量空间的必要条件. 我们还需证明有 σ 局部有限基也是可度量空间的必要条件. 证明不难，不过要引用良序定理. 我们先来证明 Stone 定理.

定理 度量空间的每一开覆盖必有局部有限开加细.

证明以前，先说明几个预备定义.

设 E 是度量空间 (X, d) 的一个子集，对于每一自然数 n，令

$$B_n(E)=\left\{x: d(x, E)<\frac{1}{2^n}\right\}.$$

$B_n(E)$ 是在 E 的基础上添加距离 E 小于 $\frac{1}{2^n}$ 的点的集合($d(x, E)$ 的定义见本章习题 6). 显然，$B_n(E)$ 是包含 E 的一个开集. 又令

$$C_n(E)=\left\{x: B_n(x)=B\left(x, \frac{1}{2^n}\right)\subset E\right\}.$$

显然，$C_n(E)=X-B_n(X-E)$，因而它是含于 E 的一个闭集. 不难验证

i) $B_n(C_n(E))\subset E$;

ii) 对于 $m>n$，$\overline{B_m(E)}\subset B_n(E)$;

iii) 如果 $C_n(E)$ 与 $X-E$ 不空，则 $d(C_n(E), X-E)\geqslant \frac{1}{2^n}$.

现在证明上述定理.

设 $\{G_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$ 是度量空间 (X, d) 的一个开覆盖，又设下标集 Λ 已排成良序. 对于每一自然数 n，依超限归纳原理定

义 X 的闭子集族 $\{E_\lambda^n\}$，

$$E_\lambda^n = C_n(G_\lambda - \bigcup_{\beta<\lambda} E_\beta^n), \lambda \in \Lambda.$$

今证明 $\{E_\lambda^n: n\in N, \lambda\in\Lambda\}$ 是 X 的闭覆盖。由于 $\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 的开覆盖，而 Λ 已排成良序，因此，对于 X 的每一点 x，存在一最小下标 $\xi=\min\{\lambda: x\in G_\lambda\}$。又由于 G_ξ 是开集，故有一整数 n，使得 $B_n(x)\subset G_\xi$。今设 $x\notin E_\xi^n$，则

$$B_n(x)\not\subset G_\xi - \bigcup_{\beta<\xi} E_\beta^n.$$

由于 $B_n(x)\subset G_\xi$，必有

$$B_n(x)\cap(\bigcup_{\beta<\xi} E_\beta^n)\neq\phi.$$

因而存在 $\alpha<\xi$，使 $B_n(x)\cap E_\alpha^n\neq\phi$。但是，对于这个 α，必有

$$x\in B_n(E_\alpha^n) = B_n(C_n(G_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta^n))$$
$$\subset G_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta^n \subset G_\alpha.$$

然而 $\alpha<\xi$，这就同 ξ 的最小性矛盾。因此，必有 $x\in E_\xi^n$。这就证明闭集族 $\{E_\lambda^n: n\in N, \lambda\in\Lambda\}$ 是 X 的闭覆盖。

对于每个 $n\in N$ 及 $\lambda\in\Lambda$，定义集合

$$F_\lambda^n = \overline{B_{n+3}(E_\lambda^n)},$$
$$G_\lambda^n = B_{n+2}(E_\lambda^n).$$

如上述，$F_\lambda^n\subset G_\lambda^n$。我们来证明，只要 $\alpha\neq\beta$，必有 $d(G_\alpha^n, G_\beta^n) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$。事实上，只需证明，只要 $\alpha\neq\beta$，而 E_α^n 及 E_β^n 不空，则 $d(E_\alpha^n, E_\beta^n)\geqslant\frac{1}{2^n}$。为此，又只需证明，对于一切 β 及一切 $\alpha<\beta$，必有 $B_n(E_\beta^n)\cap E_\alpha^n=\phi$。这可从下面推得，

$$B_n(E_\beta^n) = B_n\left(C_n\left(G_\beta - \bigcup_{\alpha<\beta} E_\alpha^n\right)\right)$$
$$\subset G_\beta - \bigcup_{\alpha<\beta} E_\alpha^n$$
$$\subset X - E_\alpha^n.$$

既然闭集族$\{F_\lambda^n\}$的闭集之间存在一致的距离，故集合 $F^n=\bigcup\{F_\lambda^n:\lambda\in\Lambda\}$也是闭集。

对于每个 $n\in N$ 及 $\lambda\in\Lambda$，定义

$$V_\lambda^n=G_\lambda^n-\bigcup_{k<n}F^k,$$

我们来证明，集族$\{V_\lambda^n:n\in N,\lambda\in\Lambda\}$满足定理的要求。由于每个 F^k 是闭集，故 V_λ^n 是开集，又设 x 是X的任一点，由于$\{E_\lambda^n\}$是X的覆盖，$\{F_\lambda^n\}$也是X的覆盖，故存在一最小数 n，使得对于某一 $\lambda\in\Lambda$，$x\in F_\lambda^n$。于是，

$$x\in F_\lambda^n-\bigcup_{k<n}\bigcup_\beta F_\beta^k=F_\lambda^n-\bigcup_{k<n}F^k\subset G_\lambda^n-\bigcup_{k<n}F^k=V_\lambda^n.$$

故$\{V_\lambda^n:n\in N,\lambda\in\Lambda\}$是$X$的覆盖。

其次，

$$V_\lambda^n\subset G_\lambda^n=B_{n+2}(E_\lambda^n)\subset B_n(E_\lambda^n)$$
$$\subset B_n\left(C_n\left(G_\lambda-\bigcup_{\beta<\lambda}E_\beta^n\right)\right)\subset G_\lambda-\bigcup_{\beta<\lambda}E_\beta^n\subset G_\lambda,$$

故$\{V_\lambda^n\}$是$\{G_\lambda\}$的开加细。

最后证明$\{V_\lambda^n\}$是局部有限的。设 $x\in X$，且 $x\in E_\lambda^n$，则

$$B_{n+3}(x)\subset B_{n+3}(E_\lambda^n)\subset\overline{B_{n+3}(E_\lambda^n)}=F_\lambda^n\subset F^n.$$

因而对于一切 $k>n$ 及一切 $\lambda\in\Lambda$，由 V_λ^k 的定义可知

$$B_{n+3}(x)\cap V_\lambda^k=\phi.$$

由于 $B_{n+3}(x)$的直径小于$\frac{1}{2^{n+2}}$且 $d(G_\alpha^n,G_\lambda^n)\geqslant\frac{1}{2^{n+1}}$，可知对于任一个 $k\leqslant n$，$B_{n+3}(x)$最多同一个 G_λ^k 相交，因此，对于这个$k\leqslant n$，$B_{n+3}(x)$最多同一个 V_λ^k 相交。这就说明，包含 x 的开集 $B_{n+3}(x)$同族$\{V_\lambda^n:n\in N,\lambda\in\Lambda\}$的最多有限个集相交。因此，开加细$\{V_\lambda^n\}$是局部有限的。]

由这个定理可知，可度量空间必是仿紧空间。

现在进一步证明，可度量空间必有 σ 局部有限基。我们

来考虑度量空间X的开球族

$$\left\{B\left(x,\ \frac{1}{n}\right): x\in X,\ n\in N\right\}.$$

显然，对于每一个n，作为度量空间X的开覆盖，如上所证，必有局部有限开加细．因此，一切这些局部有限开覆盖的并便是X的一个σ局部有限基．】

习　　题

1．证明：在欧氏平面E^2中，平常度量

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

与度量

$$d^{**}((x_1, y_1), (x_2, y_2))=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

等价．

2．证明：E^2中的度量d等价于度量

$$d^*((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\min\{1, d((x_1, y_1), (x_2, y_2))\}.$$

3．设X^*是度量空间(X, d)的子集，对于一切$x, y\in X^*$，证明d^*：$d^*(x, y)=d(x, y)$是X^*的度量．证明d^*在X^*诱导的拓扑是X的子空间拓扑．

4．设X是定义在区间$[a, b]$上的一切实值连续函数的集合，证明映射d：

$$d(f, g)=\int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt$$

是X的度量．

5．设E是度量空间(X, d)的子集，定义集E的直径$\delta(E)$如下：如果$E=\phi$，则$\delta(\phi)=0$；如果E非空且$d(x, y)(x, y\in E)$无限，则$\delta(E)=\infty$；如果E非空而$d(x, y)$有界，则$\delta(E)=\sup\{d(x, y): x, y\in E\}$．设$A, B, E$是$X$的任意子集，试证

i）$\delta(E)=0$，当且仅当E至多含有一点；

ii）如果$A\subset B$，则$\delta(A)\leqslant\delta(B)$；

iii）$\delta(E)=\delta(E)$；

iv) 如果 $A\cap B\neq\phi$，则 $\delta(A\cup B)\leqslant\delta(A)+\delta(B)$.

6. 如果 A, B 是度量空间 (X, d) 的子集，定义 A 与 B 的距离为 $d(A, B)$：

$$d(A, B)=\inf\{d(x, y): x\in A, y\in B\}.$$

设 $A, B, E\subset X$，证明

i) 如果 $x\in A, y\in B$，则 $d(A, B)\leqslant d(x, y)\leqslant\delta(A\cup B)$。

ii) 当且仅当 $d(\{x\}, E)=0$ 时 $x\in\bar{E}$。

iii) $d(\bar{A}, \bar{B})=d(A, B)$。

iv) $\delta(A\cup B)\leqslant\delta(A)+d(A, B)+\delta(B)$。

7. 证明完全有界的度量空间是可分的。

8. 拓扑空间$(X, \mathscr{T})$称为伪紧的，当且仅当 X 的每一实值连续映射是有界的。证明紧空间是伪紧的。证明度量空间当且仅当它是伪紧空间时是紧的。

9. 设 E 是度量空间的紧子集，则存在 $x, y\in E$，使得 $\delta(E)=d(x, y)$。

10. 设 E 是度量空间 X 的任一子集，验证：

i) $B_n(C_n(E))\subset E$。

ii) 对于 $m<n$，$\overline{B_m(E)}\subset B_n(E)$。

iii) 如果 $C_n(E)$ 与 $X-E$ 不空，则 $d(C_n(E), X-E)\geqslant\frac{1}{2^n}$。

第八章　滤子与网

§1　网

8.1.1 收敛理论的原始概念是序列及其极限。如5.2.2所述，拓扑空间X的序列是一个映射f，

$$f: N \longrightarrow X.$$

由于拓扑空间的广泛性，序列及其极限的概念已经不能用来充分地描述拓扑空间的特性.

例如，设$X = W_\Omega \cup \{\Omega\}$，即$X$是小于或等于第一个不可数序数$\Omega$的一切序数的集合. 考虑序拓扑$\mathscr{T}$（见第二章习题13），即取子集合

$$\{x: x < \alpha, \alpha \in X\}$$

$$\{x: x > \beta, \beta \in X\}$$

$$\{x: \alpha < x < \beta, \alpha, \beta \in X\}$$

作为基本邻域族$\mathscr{T}$的元素. 显然，$(X, \mathscr{T})$是拓扑空间. 在此拓扑空间中，点Ω显然是集W_Ω的极限点。但W_Ω的任一序列$x_1, x_2, x_3, \cdots$至多是一可数集E. 对于每个$x_n \in E$，$\{x: x < x_n\}$是W_Ω的初始段，至多是可数的. 因此

$$\bigcup \{\{x: x < x_n\}: x_n \in E\}$$

仍是可数的，仍是W_Ω的初始段. 故存在$\beta \in W_\Omega$，使对于一切$x_n \in E$，$x_n \leqslant \beta$. 而$\{x: x > \beta\}$却是Ω的一个基本邻域，它不含有(x_n)的任一项. 因此Ω不是(x_n)的极限点.

可见，拓扑空间的极限点概念不能用序列及其极限的概念来描述. 所以，为了建立拓扑空间的收敛理论，就必须推广

序列的概念．从1.4.4可知，有向集是自然数集的自然推广．因此

定义 设 D 是任一有向集，X 是拓扑空间．任一映射 $x_d: D \to X$ 称为拓扑空间 X 的网．

设子集 $D_1 \subset D$ 仍为有向集，则 x_d 在 D_1 上的限制 $x_d|D_1$ 称为 x_d 的子网．

通常把网理解为拓扑空间的一个有向点集，简记为 (x_d)，即

$$(x_d)=\{x(d): d \in D\},$$

它是 x_d 的值域．(x_d) 的元素的顺序定义为：$x_{d_1} \leqslant x_{d_2}$ 当且仅当 $d_1 \leqslant d_2$，注意 $d_1, d_2 \in D$．

8.1.2 定义 设 $(x_d)(d \in D)$ 是拓扑空间 X 的一网．点 $x \in X$ 称为 (x_d) 的接触点，当且仅当对于点 x 的每一基本邻域 V_x 及每一个 $d_0 \in D$，必存在 $d \in D$，$d \geqslant d_0$，使 $x_d \in V_x$．网 (x_d) 的一切接触点的集记为 $\operatorname{adh}(x_d)$．

定义 点 $x \in X$ 称为网 (x_d) 的极限点，当且仅当对于点 x 的每一基本邻域 V_x，存在 $d_0 \in D$，只要 $d \geqslant d_0, d \in D$，$x_d \in V_x$．网 (x_d) 的一切极限点的集合记为 $\lim(x_d)$．有极限点的网称为收敛的，否则称为发散的．

显然，$\lim(x_d) \subset \operatorname{adh}(x_d)$．

8.1.3 利用网及其极限的概念，我们不难描述拓扑空间的有关极限点的特性．

定理 设 X 是拓扑空间，则

(a) 点 $x \in X$ 是子集 $A \subset X$ 的极限点，当且仅当在 $A-\{x\}$ 中存在一网 (x_d) 收敛于 x．

(b) 点 $x \in X$ 属于子集 $A \subset X$ 的闭包，当且仅当在 A 中存在一网 (x_d) 收敛于 x．

(c) 子集 $A \subset X$ 是闭的，当且仅当在 A 中决不存在收敛

于 $X-A$ 的点的网.

证明　设在 X 上的拓扑结构为

$$\mathscr{T}=\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}.$$

考虑点 x 的基本邻域族

$$\mathscr{D}=\{V_\lambda:x\in V_\lambda,\lambda\in\Lambda\}.$$

在 $\mathscr{D}$ 上定义拟序：$V_{\lambda_1}\leqslant V_{\lambda_2}$ 当且仅当 $V_{\lambda_2}\subset V_{\lambda_1}$. 由于拓扑空间的条件[$T$.2]，$\mathscr{D}$是一有向集. 由于 x 是 A 的极限点，对于$\mathscr{D}$的每一元 V_λ，存在一点 x_{V_λ}，

$$x_{V_\lambda}\in V_\lambda\cap(A-\{x\}).$$

显然，网(x_{V_λ})收敛于点 x. 反之，如果 $A-\{x\}$ 中有一网收敛于 x，则 x 的每一邻域同 $A-\{x\}$ 相交，因而 x 是A的极限点.

为了证明(b)，注意$\bar{A}=A\cup A'$. 对于A的极限点 x，由(a)可知，$A-\{x\}$ 有一网收敛于 x. 对于 A 的一点 x，令网(x_d)取常值 x，则(x_d)收敛于 x. 所以，对于 $\bar{A}$ 的每一点，A 中有一网收敛于它. 反之，如果 A 中有一网收敛于 x，则 x 的每一邻域同 A 相交，因而 x 属于 $\bar{A}$.

命题(c)是显然的.]

§ 2　滤子与超滤子

8.2.1　在收敛理论中，滤子概念有特殊的重要性. 因此，本章重点介绍一些滤子理论的常用的基本结果.

定义　集合 X 上的滤子 $\varphi=\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 的一族子集，满足下列条件：

[F.1]　φ 的任意两元的交仍属于 φ；

[F.2]　如 $E\subset X$ 包含 φ 的一元，则 $E\in\varphi$；

[F.3]　空集不属于 φ.

例如，以α表示一切余为有限个自然数的N的子集的族，则α满足上述三条件，α是N上的一个滤子．又如，以β表示一切包含自然数“2”的N的子集的族，则β也是N上的一个滤子。只满足条件F_1, F_2的$\exp X$称为非真滤子．

以$F(X)$表示集合X上的一切滤子(包括非真滤子)的集合．对于任意两个滤子$\mu, \nu \in F(X)$，定义$\mu \leqslant \nu$当且仅当$\mu \subset \nu$，则$\leqslant$是$F(X)$上的反对称拟序．可证(参见[12])。

定理　$F(X)$是一拟序格．

除去非真滤子，$F(X)$中的极大元称为超滤子，它的性质特别值得注意．如上例，β就是$F(N)$的一个超滤子．

8.2.2　一般说来，关于超滤子，有如下重要结果．

定理　对于每个滤子，存在包含它的超滤子．

证明　设$\varphi \in F(X)$，以Φ表示一切包含φ的非真滤子的集合。即

$$\Phi = \{\mu : \varphi \subset \mu \in F(X)\}.$$

显见Φ不空，因为Φ至少含有φ．Φ是$F(X)$的半序子集．今设$\Gamma \subset \Phi$是一链，令σ为Γ中一切滤子的并，即$E \in \sigma$当且仅当存在$\gamma \in \Gamma$使$E \in \gamma$．显然，σ满足条件[F.2]及[F.3]．如果$E_1, E_2 \in \sigma$，则存在$\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$，使$E_1 \in \varphi_1$，$E_2 \in \varphi_2$．由于$\Gamma$是链，$E_1$与$E_2$必同时属于$\varphi_1$或同时属于$\varphi_2$，在任何情况下，它们的交属于$\sigma$。于是$\sigma$满足条件[$F$.1]，因而$\sigma$是$\Gamma$的上确界．根据Zorn引理，$\Phi$必含有一极大元．根据$\Phi$的定义，$\Phi$的极大元就是包含$\varphi$的超滤子.]

定理　设$E \subset X$，$\varphi \in F(X)$是一个超滤子．如果E和φ的每个元素的交不空，则E必属于φ。

证明　令$\beta = \{E\} \cup \varphi$．$\beta$的任意有限个元的交不空．$\beta$的一切有限个元的交的集族$\beta^*$生成滤子$\{F : \exists B \in \beta^*,\ B \subset F \subset X\}$含有$E$及$\varphi$的一切元素．由于$\varphi$是极大的滤子，因而

$\varphi\supset\beta^*$,所以$E\in\varphi$.]

定理 设$\varphi\in F(X)$. φ是超滤子当且仅当对于每个$E\subset X$,$E\notin\varphi$蕴涵$E^c\in\varphi$.

证明 设φ是超滤子,$E\notin\varphi$,则存在$F\in\varphi$使$E\cap F=\phi$. 故$X-E\supset F$. 因此$E^c\in\varphi$.

设φ是满足定理条件的滤子,则存在超滤子$\psi\supset\varphi$. 今证$\psi=\varphi$. 设$E\in\psi$,则$E^c\notin\varphi$,否则$E^c\in\psi$. 因而$E\cap E^c=\phi\in\psi$,此不可能. 故$E\in\varphi$,于是$\psi\subset\varphi$. 即$\psi=\varphi$. 所以φ是超滤子.]

8.2.3 设X是拓扑空间,$\varphi\in F(X)$.

定义 集合$\bigcap\{\bar{F}:F\in\varphi\}$称为滤子$\varphi$的接触点集,记为$\mathrm{adh}\varphi$,即

$$\mathrm{adh}\varphi=\bigcap\{\bar{F}:F\in\varphi\}.$$

所以,点x是φ的接触点,当且仅当点x的每个基本邻域同φ的每个元相交.

定义 点x称为φ的极限点,或称φ收敛于点x,当且仅当点x的每个基本邻域属于φ. 滤子φ的极限点集记为$\lim\varphi$.

显见,$\lim\varphi\subset\mathrm{adh}\varphi$.

定理 点x是滤子$\varphi\in F(X)$的接触点,当且仅当存在滤子$\psi\supset\varphi$,ψ收敛于x.

证明 如果x是φ的接触点,则对于x的每个基本邻域V_x,及每个$F\in\varphi$,$V_x\cap F\neq\phi$. 定义集族ψ:$E\in\psi$当且仅当存在$F\in\varphi$使$E\supset V_x\cap F$. 易证ψ是X上的滤子,收敛于x,且$\psi\supset\varphi$.

反之,设$x\in\lim\psi$且$\psi\supset\varphi$,则对于点x的每个基本邻域V_x,$V_x\in\psi$,因此V_x同φ的每个元相交. 所以,点$x\in\mathrm{adh}\varphi$.]

推论 如果$\varphi\in F(x)$是超滤子,则

$$\mathrm{adh}\varphi=\lim\varphi.$$

证明　显然，$\lim\varphi\subset\mathrm{adh}\varphi$。只需证 $\mathrm{adh}\varphi\subset\lim\varphi$。设 $x\in\mathrm{adh}\varphi$，因 φ 是极大的，所以 $x\in\lim\varphi$。]

8.2.4 不难用滤子和超滤子给出紧性的条件。

定理　拓扑空间 X 是紧的，当且仅当每个滤子 $\varphi\in F(X)$ 至少有一接触点。

证明　由于集族 $\{F:F\in\varphi\}$ 的有限交不空，而 X 是紧的，所以 $\mathrm{adh}\varphi=\bigcap\{\bar{F}:F\in\varphi\}$ 不空。反之，设 X 不是紧的，则根据 5.1.2，存在一闭集族 $\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，具有有限交性质，但

$$\bigcap\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\phi.$$

利用集族 $\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 可得一滤子 φ：$E\in\varphi$ 当且仅当存在有限个 $\lambda\in\Lambda$，使 $E\supset\bigcap_{i=1}^{n}F_{\lambda_i}$。设 $x\in\mathrm{adh}\varphi$。既然 $\varphi\supset\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，可知 $x\in\bigcap\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$。即

$$\mathrm{adh}\varphi\subset\bigcap\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\phi.$$

所以，滤子 $\varphi\in F(X)$ 没有接触点。]

定理　拓扑空间 X 是紧的，当且仅当每个超滤子 $\psi\in F(X)$ 是收敛的。

证明　如果 X 是紧的，则每个滤子至少有一接触点，故每个超滤子收敛。

如果 X 不是紧的，则存在滤子 $\varphi\in F(X)$ 没有接触点。由于存在超滤子 $\psi\supset\varphi$，于是，

$$\mathrm{adh}\psi\subset\mathrm{adh}\varphi=\phi,$$

故 $\lim\psi=\phi$。所以，超滤子 ψ 不收敛。]

§ 3 网与滤子

8.3.1 在收敛理论中，网的概念与滤子的概念是等效的．下面加以证明．

定理 设$\{x(d):d\in D\}$是拓扑空间X中的任一网，则存在X上的滤子φ，使

$$\operatorname{adh}\varphi=\operatorname{adh}(x_d),$$

$$\lim\varphi=\lim(x_d).$$

证明 对于每个$d\in D$，定义

$$B_d=\{x_\delta:d\leqslant\delta,\delta\in D\}.$$

由于D是有向集，集族$\mathscr{B}=\{B_d:d\in D\}$具有有限交性质．从$\mathscr{B}$可得一滤子$\varphi$：$E\in\varphi$当且仅当存在$d\in D$，使$B_d\subset E$．今证$\varphi$满足定理的要求．

设$x\in\operatorname{adh}(x_d)$，则对于给定的基本邻域$V_x$及$d\in D$，存在$\delta\in D$，使$d\leqslant\delta$且$x_\delta\in V_x$．因此，对于每个$V_x$及每个$d\in D$，$V_x$与$B_d$相交，可见$x\in\operatorname{adh}\varphi$．今设$x\in\operatorname{adh}\varphi$．对于给定的基本邻域$V_x$及$d\in D$，$V_x\cap B_d\neq\phi$，因而存在$x_\delta\in V_x\cap B_d$，这里$\delta\geqslant d$．即存在$\delta\geqslant d$，使$x_\delta\in V_x$．所以，$x\in\operatorname{adh}(x_d)$．

其次，设$x\in\lim(x_d)$，则对于每个基本邻域V_x，存在$d\in D$，只要$\delta\geqslant d$，就有$x_\delta\in V_x$．所以，$B_d\subset V_x$，从而$x\in\lim\varphi$．反过来，设$x\in\lim\varphi$且V_x为x的任一基本邻域，则存在d使$B_d\subset V_x$，因而只要$\delta\geqslant d$，就有$x_\delta\in V_x$．即$x\in\lim(x_d)$.]

8.3.2 反过来，我们有

定理 设φ是在拓扑空间X上的滤子，则在X中存在一网(x_d)使

$$\operatorname{adh}(x_d)=\operatorname{adh}\varphi,$$

$$\lim(x_d)=\lim\varphi.$$

证明　以 D 表示一切序偶 $d=(x,F)$ 的集合，这里 $x\in F$，而 $F\in\varphi$。定义 $d_1\leqslant d_2$ 当且仅当 $F_2\subset F_1$，则 D 成为一有向集. 对于每个 $d=(x,F)$，定义 $x(d)=x$，则 (x_d) 是 X 的一网. 我们来证 (x_d) 满足定理的要求.

设 $x\in\lim\varphi$，V_x 为点 x 的任一基本邻域，于是存在 $F\in\varphi$ 使 $F\subset V_x$。令 $d=(y,F)$，设 $\delta=(z,G)$，则只要 $\delta\geqslant d$，即 $G\subset F$，便有

$$x(\delta)=z\in G\subset F\subset V_x.$$

因而 x 是 (x_d) 的极限点. 反之，如果 $x\in\lim(x_d)$，设 V_x 是 x 的任一基本邻域，则存在 $d=(y,F)$，只要 $\delta\geqslant d$，就有 $x_\delta\in V_x$. 对于每个 $z\in F$，令 $\delta=(z,F)$，则 $x_\delta=z\in V_x$，因而 $F\subset V_x$。这就证明了 $x\in\lim\varphi$.

设 $x\in\operatorname{adh}\varphi$，故对于 x 的每个基本邻域 V_x 及每个 $F\in\varphi$，$V_x\cap F\neq\phi$. 令 $d=(y,F)$，选取 $z\in V_x\cap F$，令 $\delta=(z,F)$，则 $\delta\geqslant d$ 且 $x_\delta=z\in V_x$，因而 $x\in\operatorname{adh}(x_d)$. 另一方面，如果 $x\in\operatorname{adh}(x_d)$，则对于任意的 V_x 及 $F\in\varphi$，存在 $\delta\in D$，

$$\delta=(z,G)\geqslant d=(y,F)$$

使 $x_\delta\in V_x$。即

$$x_\delta=z\in G\cap V_x\subset F\cap V_x,$$

因而 V_x 与 F 相交. 这就证明了 $x\in\operatorname{adh}\varphi$.]

8.3.3　上述两定理说明，研究接触点与极限点时，可以只讨论网或只讨论滤子. 例如，从 8.2.4 的定理，可得如下定理.

定理　拓扑空间 X 是紧的，当且仅当每个在 X 中的网至少有一接触点.

又如，为了证明下述两定理，我们只要证明其中之一.

定理　如果 X 是 Hausdorff 空间，且 (x_d) 是 X 中的收敛网，则 $\operatorname{adh}(x_d)$ 只有一个点，且

$$\lim(x_d)=\mathrm{adh}(x_d).$$

定理 如果X是Hausdorff空间，且φ是在X上的收敛滤子，则$\mathrm{adh}\varphi$只有一个点，且

$$\lim\varphi=\mathrm{adh}\varphi.$$

例如，我们可证明后者.

证明 设x, y是X的两个相异点，V_x及V_y分别是x及y的不交的基本邻域. 如果$x\in\lim\varphi$，则存在$F\in\varphi$，使$F\subset V_x$. 所以$F\subset V_y^c$，$\bar{F}\subset V_y^c$. 这就说明

$$y\notin\bigcap\{\bar{F}:F\in\varphi\}=\mathrm{adh}\varphi.$$

又由$\lim\varphi\subset\mathrm{adh}\varphi$得$\lim\varphi=\mathrm{adh}\varphi=\{x\}$.]

§4 乘积不变性

8.4.1 设$\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是一族拓扑空间. 我们问，有哪些性质为积空间$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$所保持不变呢?

定理 如果对于每个$\lambda\in\Lambda$，X_λ是Hausdorff空间，则积空间$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是Hausdorff空间.

证明 设$\{x_\lambda:\lambda\in\Lambda, x_\lambda\in X_\lambda\}$及$\{y_\lambda:\lambda\in\Lambda, y_\lambda\in X_\lambda\}$是积空间$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$的两个相异点，则至少有一下标$\lambda=\beta$，使$x_\beta\neq y_\beta$. 于是，在$X_\beta$中存在两个不相交的基本邻域$V_x$及$V_y$，分别包含$x_\beta$及$y_\beta$. 显然，$\pi_\beta^{-1}(V_x)$及$\pi_\beta^{-1}(V_y)$是积空间$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$的两个不相交的基本邻域，分别包含点$\{x_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$及$\{y_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$.]

仍设$\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$为一族拓扑空间，而这族空间的积空间为$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$. 下述定理称为Тихонов乘积定理.

定理 $\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是紧的，当且仅当每个$X_\lambda$是紧的.

证明 如果$\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是紧的，则对于每个$\alpha\in\Lambda$，

$$\pi_\alpha\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=X_\alpha.$$

由于每个 π_α 是连续的，所以每个 X_α 是紧的。

反之，如果每个 X_λ 是紧的。设 $\mathscr{H}=\{H_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ 是 $\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 的闭集族，具有有限交性质。要证

$$\bigcap\{H_\gamma:\gamma\in\Gamma\}\neq\phi.$$

定义 $\mathscr{H}$ 生成的滤子 φ：$F\in\varphi$ 当且仅当存在 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n\in\Gamma$，使 $\bigcap_{i=1}^{n}H_{\gamma_i}\subset F$。而 φ 又含于某一超滤子 $\psi=\{F_\alpha:\alpha\in A\}$。对于每个 $\lambda\in\Lambda$，考虑 X_λ 的闭集族

$$\{\overline{\pi_\lambda F_\alpha}:\alpha\in A\}.$$

此集族具有有限交性质，因为

$$\bigcap_{i=1}^{n}\overline{\pi_\lambda F_{\alpha_i}}\supset\bigcap_{i=1}^{n}\pi_\lambda F_{\alpha_i}\supset\pi_\lambda\left[\bigcap_{i=1}^{n}F_{\alpha_i}\right].$$

由于 X_λ 是紧的，故

$$\bigcap\{\overline{\pi_\lambda F_\alpha}:\alpha\in A\}\neq\phi.$$

设

$$x_\lambda\in\bigcap\{\overline{\pi_\lambda F_\alpha}:\alpha\in A\}.$$

今证 $x=\{x_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\in\bigcap\{H_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$。由于每个 H_γ 是闭集，故只要证点 x 的每个基本邻域同每个 H_γ 相交。

点 x 的每个基本邻域都是有限个形如 $\pi_\lambda^{-1}(V_\lambda)$ 的交，其中 V_λ 是点 x_λ 在 X_λ 的任一基本邻域。由于 V_λ 同每个 $\pi_\lambda F_\alpha$ 相交，ψ 为超滤子，π_λ 满值，易证 $\{\pi_\lambda F_\alpha:\alpha:A\}$ 为超滤子，故 $V_\lambda\in\{\pi_\lambda F_\alpha:\alpha\in A\}$。$\pi_\lambda^{-1}(V_\lambda)$ 也就属于 ψ，从而任意有限交

$$\pi_{\lambda_1}^{-1}(V_{\lambda_1})\cap\pi_{\lambda_2}^{-1}(V_{\lambda_2})\cap\cdots\cap\pi_{\lambda_n}^{-1}(V_{\lambda_n})$$

也属于 ψ，即点 x 的每个基本邻域都属于 ψ。由于 $\psi\supset\mathscr{H}$，故点 x 的每个基本邻域同 $\mathscr{H}$ 的每个元相交，因此点 x 属于每个 H_γ。所以，

$\bigcap\{H_\gamma:\gamma\in\Gamma\}\neq\phi$.]

8.4.2 在前面4.3.3中，我们曾证明任意多个连通的拓扑空间的积空间仍为连通的拓扑空间. 因此，拓扑空间的连通性是任意乘积不变的性质. 现在又进一步证明了紧性也是任意乘积不变的性质. 研究拓扑空间的乘积(有限积，可数积或任意积)不变的性质是拓扑学的重要课题.

§ 5 Stone-Čech 紧化

8.5.1 利用上节的结果，本节给出Тихонов空间的重要特性.

定理 每个Тихонов空间X同胚于紧Hausdorff空间βX的一个稠密子集$\hat{X}$，使对于每一定义在$\hat{X}$上的有界、连续、实值映射f，存在从βX到R的连续映射$f^\beta:\beta X\longrightarrow R$，满足$f^\beta|\hat{X}=f$.

证明 设$\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是定义在$X$上的一切实值、有界、连续函数族. 由于这些函数有界，不妨设每个f_λ的值域是I_λ ($I_\lambda=[0,1]$). 根据8.4.1的定理，积空间$\Pi\{I_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是紧的Hausdorff空间. 对于$X$的每一点$x$，定义从$X$到$\Pi\{I_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$的映射$h(x)=\{f_\lambda(x):\lambda\in\Lambda\}$. 令$\hat{X}=h(X)$. 又令$h(X)$在$\Pi\{I_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$中的闭包为$\beta X$. 既然$\beta X$是紧Hausdorff空间的闭子集，故$\hat{X}$是紧Hausdorff空间$\beta X$的稠密子集. 我们断言，$h$是$X$与$\hat{X}$的同胚.

由于$\pi_\lambda\circ h=f_\lambda$，根据3.3.2可知$h$是连续的. 又，如果$x$, y是X的两个相异的点，则由Тихонов性质可知，存在λ使$f_\lambda(x)=0\neq1=f_\lambda(y)$. 因此，$h(x)\neq h(y)$. 所以，$h$是一一的. 再证$h$是开映射. 设$G$是$X$的任一开子集，要证$h(G)$开于$\hat{X}$. 任取一点$x\in G$，由于$X$是Тихонов空间，必存

在下标 λ，使 $f_\lambda(x)=0$，而 $f_\lambda(X-G)=\{1\}$。显然，$\hat{X}\cap\pi_\lambda^{-1}[(-\infty,1)]$ 是包含点 $h(x)$ 的 $\hat{X}$ 的开子集。不仅如此，由下图

$$\begin{array}{ccc} & \overset{f_\lambda}{\nearrow} & I_\lambda \\ X & & \downarrow \pi_\lambda^{-1} \\ & \underset{h}{\searrow} & \prod\{I_\lambda:\lambda\in\Lambda\} \end{array}$$

可见，如果 $\hat{x}\in\hat{X}\cap\pi_\lambda^{-1}[(-\infty,1)]$，则 $\pi_\lambda(\hat{x})\neq 1$。故 $f_\lambda^{-1}\pi_\lambda(\hat{x})\in G$。但 $h^{-1}(\hat{x})=f_\lambda^{-1}\pi_\lambda(\hat{x})\in G$。于是 $\hat{x}\in h(G)$。因此，

$$\hat{X}\cap\pi_\lambda^{-1}[(-\infty,1)]\subset h(G).$$

所以，$h(G)$ 开于 $\hat{X}$。这就证明了 h 是 X 与 $\hat{X}$ 的同胚。

最后，设 f 是定义在 $\hat{X}$ 上的有界、实值、连续映射。必存在 $\lambda_0\in\Lambda$，使 $f\circ h=f_{\lambda_0}$。定义映射

$$f^\beta:\beta X\longrightarrow I_{\lambda_0}$$

为 $f^\beta(\{x_\lambda:\lambda\in\Lambda,\ x_\lambda\in I_\lambda\})=\pi_{\lambda_0}(\{x_\lambda:\lambda\in\Lambda,\ x_\lambda\in I_\lambda\})=x_{\lambda_0}$。由于 π_{λ_0} 是连续的，故 f^β 是连续的。为了证明 $f^\beta|\hat{X}=f$，任取一点 $\hat{x}\in\hat{X}$，由于 h 是从 X 到 $\hat{X}$ 的同胚，故必存在 $x\in X$，使 $h(x)=\hat{x}$。此时，

$$f^\beta(\hat{x})=f^\beta[h(x)]=f^\beta[\{f_\lambda(x):\lambda\in\Lambda\}]=f_{\lambda_0}(x).$$

但

$$f(\hat{x})=f[h(x)]=f_{\lambda_0}(x),$$

所以

$$f^\beta|\hat{X}=f.\ \rule{0.5em}{0.8em}$$

8.5.2 引进如下定义。

定义 拓扑空间 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 称为 $(X,\mathscr{T})$ 的扩张，当且仅当 $(X,\mathscr{T})$ 是 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 的稠密子空间。如果 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 是紧的，则称 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 为 $(X,\mathscr{T})$ 的紧扩张或紧化。

因此，由上述定理，βX 是 X 的紧扩张，βX 通常称为 X 的

Stone-Čech 紧化.

又,5.5.1 的单点紧化空间 X^* 是 X 的紧扩张.

将一个非紧的拓扑空间X紧化,也就是寻求一个紧拓扑空间 X^*,使 X^* 是X的紧扩张.

将拓扑空间紧化,有助于化繁为简,化难为易.例如,我们来证明

定理 每一局部紧的 Hausdorff 空间是正则的.

证明 设X是一局部紧的 Hausdorff 空间.设X^*是X的单点紧化.由第六章习题 30 可知 X^* 是正则的.由于正则性是遗传性质,因而X也是正则的.]

不仅如此,我们来进一步证明

定理 每一局部紧 Hausdorff 空间是全正则的.

证明 设 X^* 是局部紧 Hausdorff 空间X的单点紧化,则由第六章习题31,可知 X^* 是正规的.设 $p\in X$,U是X中包含点 p 的开集.由于X是局部紧的,故点 $p\in X$ 有一基本邻域 W,$\overline{W}\subset U$,且 $\overline{W}$ 是紧的.于是,$V=X^*-\overline{W}$ 是 X^* 的开集.由于 $\overline{V}$ 与 p 是正规空间 X^* 的不交闭集,应用 6.6.3 的 Урысон 引理,可知存在连续映射

$$f:X^*\longrightarrow[0,1]$$

使 $f(p)=0$,$f(\overline{V})=\{1\}$.由于$\overline{V}\supset X-U$,所以X是全正则的.]

至于 Stone-Čech 紧扩张,在拓扑学研究中的作用,那就更值得注意了.

习　题

1. 设 X 是一不空集,命 $\mu(x)$为 X 中包含点 x 的一切子集的族.证明 $\mu(x)$是超滤子.

2. 设 X 是一无限集,$F\subset X$,$F\in\varphi$ 当且仅当 F^c 是一有限集.证明

φ 是滤子。

3．设 φ,ψ 是 X 上的滤子，证明 $\varphi\cap\psi$ 仍是 X 上的滤子。

4．设 X 是拓扑空间，$\mathscr{D}$ 是 X 的一切覆盖的集合，$\{U_\lambda\},\{V_\gamma\}\in\mathscr{D}$，$\{U_\lambda\}\leqslant\{V_\gamma\}$ 当且仅当 $\{U_\lambda\}$ 加细 $\{V_\gamma\}$。证明 $\mathscr{D}$ 是一有向集。

5．设 X 是一无限集，在 X 上的拓扑为有限余拓扑。证明 X 上的每个滤子至少有一接触点，每个超滤子收敛。

6．证明 $\mathrm{adh}(x_d)$ 是一闭集。

7．设 $X=[0,1]$，在 X 上的拓扑为平常拓扑。证明在 X 上的每个超滤子收敛。

8．用滤子证明：如果 X_1,X_2 是拓扑空间 X 的紧子空间，则 $X_1\cup X_2$ 是紧的。

9．证明在集 X 上任一超滤子的一切元素最多有一公共点。

10．证明：如果积空间 $\Pi\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 Hausdorff 空间，则每个 X_λ 是 Hausdorff 空间。

11．证明，滤子 φ 是一超滤子，当且仅当下述条件满足：$A\cup B\in\varphi$ 蕴涵 $A\in\varphi$ 或 $B\in\varphi$。

12．证明：集 $E\subset X$ 是闭的，当且仅当它含有任一包含 E 的滤子的任一接触点。

13．设 X 是拓扑空间，

$$\varphi=\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$$

是 X 上的滤子，φ 的闭包 $\bar{\varphi}$ 定义为

$$\bar{\varphi}=\{\bar{F}_\lambda:\lambda\in\Lambda\}.$$

证明 X 是 T_3 空间当且仅当对于每个滤子 $\varphi\in F(X)$，$\lim\bar{\varphi}=\lim\varphi$。

14．试证明：$F(X)$ 是一拟序格。

第九章　拓扑流形

§1　欧氏空间的拓扑性质

9.1.1　从解析几何学知道，空间的种种性质，可以利用坐标来研究。我们自然会想到，拓扑空间的种种性质，能否类似地用坐标来研究呢？这就是本章的主题。

为此，我们先来研究一下欧氏空间的一种重要性质。

设X是一个拓扑空间，A是X的子集，h是从X到X的同胚。那么，如3.2.2所述，若x是A的内点，则$h(x)$仍为$h(A)$的内点；若x是A的边界点，则$h(x)$仍为$h(A)$的边界点。但是，如果h只在A上定义，则边界点或内点未必是不变的。例如，设X是E^3空间中由平面$(x_1, x_2, 0)$及x_3轴组成，A是X中由x_3轴组成的子集，h是一从x_3轴到x_1轴的同胚映射。则点$(0,0,1)$是A的一个内点，但它的象$h(0,0,1)$不再是$h(A)$的内点，因为在X中不存在包含点$h(0,0,1)$而完全含于$h(A)$的开集。然而，对于欧氏空间来说，不会发生这种情形。内点的同胚象必仍为内点。这个定理，称为区域不变性定理。

为了证明区域不变性定理，先来证明欧氏空间E^n的方体I^n

$$I^n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n): a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$$

的内点同边界点的相反的拓扑性质A及B。

[A] 对于I^n的内点x，不论点x的邻域$V(x)$如何小，存在从$(I^n-V)\cup V^b$到S^{n-1}

$$S^{n-1}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}$$

的连续映射,不能连续地扩张到 I^n。

[B] 对于 I^n 的边界点 x,存在点 x 的小邻域 $V(x)$,不论从 $(I^n-V)\cup V^b$ 到 S^{n-1} 的连续映射如何,均能连续地扩张到 I^n。

9.1.2 为了证明命题[A],用反证法. 假设相反,x 是 I^n 的内点,取闭包含于 I^n 的球邻域为 $V(x)$,取 f 为以 x 为投影中心从 $(I^n-V)\cup V^b$ 到 $(I^n)^b$(与 S^{n-1} 同胚)的中心投影. 显然,f 使 $(I^n)^b$ 的点不动.如果存在 f 的连续扩张 f^*,则 f^* 仍使 $(I^n)^b$ 的点不动.

考虑连续映射 F_t:

$$F_t(x)=f^*[(1-t)x],x\in(I^n)^b,t\in[0,1],$$

则常值映射 $F_1(x)$ 与恒等映射 $F_0(x)$ 同伦. 然而这是不可能的.

下面我们来证明常值映射 $F_1(x)$ 与恒等映射 $F_0(x)$ 不能同伦. 为了方便起见,假设 F_t 是定义在球面 S^{n-1}(注意,S^{n-1} 与 $(I^n)^b$ 同胚!)之上的.

设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 及 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是欧氏空间 E^n 的两个点,则 E^n 内所有满足下列条件的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\lambda a_1+\mu b_1\\x_2&=\lambda a_2+\mu b_2\\&\cdots\cdots\\x_n&=\lambda a_n+\mu b_n\end{aligned}\right\}\lambda+\mu=1,\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0,$$

的集合记为 $[a,b]$,称为以 a,b 为端点的线段. 欧氏空间 E^n 的子集合 M 称为是凸的,如果 $a,b\in M$,则 $[a,b]\subset M$.

球面 S^{n-1} 的 n 个点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,如果每两点的距离都

小于 1，则取包含这 n 个点的最小凸集，从原点 $(0,0,\cdots,0)$ 将这凸集向球面 S^{n-1} 投射，得到 S^{n-1} 的一个子集，记为 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$，称为球面 S^{n-1} 上的单形．$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为此单形的顶点．同理，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的任意 $n-1$ 个（例如，$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$）也能确定一单形，称为单形 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$ 的面单形．考虑任一从 S^{n-1} 到它本身的连续映射 φ，如果诸点 $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \cdots, \varphi(a_n)$ 中，每两点的距离也都小于1，则从这 n 个点也得到一个单形，记为 $\varphi\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$。由于 φ 的连续性，设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中每两点的距离都小于 δ，只要 δ 足够小，从 $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \cdots, \varphi(a_n)$ 就得到一个单形．同理，设 T 为 S^{n-1} 上的一组单形，S^{n-1} 的每一点至少属于一个单形，每两个单形的交是面单形或空集，每个单形的任意两个顶点距离均小于 δ，则只要 δ 足够小，经连续映射 φ 后，仍得到一组单形，记为 $\varphi(T)$。又设 p 及 q 为 S^{n-1} 的任意两点，以 $n(p, \varphi, T)$ 表示 $\varphi(T)$ 中包含点 p 的单形的总数，以 $n(q, \varphi, T)$ 表示 $\varphi(T)$ 中包含点 q 的单形的总数。我们来证明 $n(p, \varphi, T)$ 及 $n(q, \varphi, T)$ 同为奇数或同为偶数。在 S^{n-1} 上从 p 至 q 画一弧．当点 x 沿此弧从 p 至 q 移动，仅当 x 穿过一单形的一面时，$n(x, \varphi, T)$ 才可能发生变化．设穿过的面单形为 $\langle\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_{n-1})\rangle$，于是顶点 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 确定 T 的一个面单形，它恰是 T 的两个单形 α 和 β 的交（公共边界）。考虑 $\varphi(\alpha)$ 及 $\varphi(\beta)$，有两种可能：$\varphi(\alpha)$ 及 $\varphi(\beta)$ 或者有重叠部分，或者不相重叠．在第一种情形，$n(x, \varphi, T)$ 的改变数为 2．而在第二种情形，$n(x, \varphi, T)$ 保留不变。不论哪一种情形，$n(x, \varphi, T)$ 的奇偶性不变．因此，$n(p, \varphi, T)$ 与 $n(q, \varphi, T)$ 的奇偶性相同．也就是说，$n(p, \varphi, T)$ 的奇偶性同点 p 无关，而是连续映射 φ 的性质，因此，可简记为 $n(\varphi, T)$。

现在进一步证明 $n(F_t, T)$ 的奇偶性不随 t 的变化而改

变. 设 p 是 S^{n-1} 的任一点,而

$$|t-t'|<\delta.$$

只要 δ 足够地小,就有

$$n(p, F_t, T)=n(p, F_{t'}, T).$$

因此, 只要 δ 足够小, $n(F_t, T)=n(F_{t'}, T)$. 这就证明了, $n(F_t,T)$是不随 t 的变化而改变的. 但是,由于 F_0 是恒等映射, $n(F_0,T)=1$, 而 F_1 是常值映射, $n(F_1, T)=0$. 即 $n(F_0,T)\neq n(F_1,T)$. 得出矛盾的结果. 所以, F_0 与 F_1 不同伦.

9.1.3 为了证明命题[B],设 x 是 I^n 的任一个边界点, 取以 x 为中心不完全包含 I^n 的球邻域 V. 设 f 是从 $(I^n-V)\cup V^b$ 到 S^{n-1} 的任一个连续映射. 由于 x 是边界点, 必存在一属于 V 而不属于 I^n 的点 q,以 q 为中心,将 $I^n\cap V$ 向 V^b 投射,以 π 记此中心投影, 显然 π 是连续映射. 考虑连续映射F:

$$F(p)=f(p), \text{当 } p\in(I^n-V)\cup V^b,$$

$$F(p)=f(\pi(p)), \text{当 } p\in I^n\cap V.$$

于是 $F(p)$是一从 I^n 到 S^{n-1} 的连续映射,而且 F 是 f 的连续扩张.]

9.1.4 注意, 在证明命题[B]时, 我们考虑方体 I^n. 其实,以任一子集 M 代替 I^n,证明过程一字不变地仍然适用. 对于命题[A],若 M 是任一子集合,x 是 M 的内点, 那么,我们总可以选取一以 x 为内点的充分小的 I^n, 使之完全含于 M 中. 据此,我们来证明 Brouwer 区域不变性定理.

区域不变性定理 设 M 是 E^n 的任一子集. h 是从 M 到 $h(M)$ 的同胚. 如果 x 是 M 的内点, 则 $h(x)$必是 $h(M)$ 的内点. 由此推知,如果 A 及 B 是 E^n 的同胚子集,若 A 是开集,则 B 也是开集.

证明　由于 x 是 M 的内点，故必存在一以 x 为内点完全含于 M 中的小方体 I^n. 如果 $h(x)$ 不是 $h(M)$ 的内点，则 $h(x)$ 更不是 $h(I^n)$ 的内点，因而是 $h(I^n)$ 的边界点. 由命题[B]，存在 $h(x)$ 的开邻域 V，满足命题[B]的条件. 又因为 h 是同胚映射，故对于 $h(x)$ 的开邻域 V，存在 x 的开邻域 $W \subset I^n$，$W \subset h^{-1}(V)$. 由命题[A]，存在从 $(I^n - W) \cup W^b$ 到 S^{n-1} 的连续映射 f，不能连续扩张到 I^n. 然而，另一方面，将命题[B]运用于 $h(I^n)$ 的边界点 $h(x)$ 及开邻域 V，考虑连续映射 fh^{-1}，对于 $(h(I^n)-V) \cup V^b$ 的任一点 y，$f(h^{-1}(y)) \in S^{n-1}$. 可知 fh^{-1} 能连续地扩张到 $h(I^n)$，因此 f 也能连续地扩张到 I^n. 得出矛盾. 所以，$h(x)$ 不是 $h(M)$ 的边界点.】

§ 2　局部坐标系

9.2.1　为了用坐标系来研究拓扑空间，我们首先来分析一下平面坐标系的特性.

(1) 平面的不同的两点具有不同的坐标. 如设两点 P，Q 的坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则当 $P \neq Q$ 时，必有 $x_1 \neq x_2$ 或 $y_1 \neq y_2$. 反之，如果两点的坐标不同，则此两点不同.

(2) 设点列 (P_n) 的坐标为 (x_n, y_n)，点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，则点列 (P_n) 收敛于点 P 当且仅当 $x_n \to x_0$ 且 $y_n \to y_0$.

(3) 在平面内存在以任意实数对 (x, y) 为坐标的点(由(1)知这样的点是唯一的).

如果所讨论的对象不是平面的全部，而只是其中一部分. 例如，以原点 O 为中心，以 r 为半径的圆的内部区域 D. 此时，D 内每一点仍然可以用坐标表示出来. 不过，要注意，上述的性质 (1) 及 (2) 依然成立，但性质 (3) 须改为如下形

式．

(3′) 设(x,y)是满足 $x^2+y^2<r^2$ 的任意实数对，以之为坐标的点 P 在 D 内唯一地存在．

现在考虑球面 S^2．我们问，满足上述性质(1)，(2)，(3)的坐标系是否存在？回答是否定的．因为，如果这种坐标系存在，则球面将与平面同胚．但球面是紧的，而平面却非紧，这就同紧性的拓扑不变性矛盾．同理，对于球面，即使满足(1)，(2)，(3′)的坐标系也不存在．虽然如此，我们仍然能给球面引进满足条件(1)，(2)，(3′)的坐标系，不过，只存在局部坐标系罢了．

9.2.2 我们采取如下的办法．

利用空间直角坐标系(x,y,z)，将球面 S^2 的方程写成

$$S^2: x^2+y^2+z^2=r^2, (r>0).$$

分别以条件

$$S': z>-\frac{r}{2},\ S'': z<\frac{r}{2}$$

来定义 S^2 的两部分 S' 及 S''．

设 $P=(x,y,z)$是 S' 上的任一点，连接点 P 及南极$(0,0,-r)$的直线交 xOy 平面于一点$(u,v,0)$，取(u,v)作为 S' 的点 P 的坐标．不难算出

$$u=\frac{rx}{r+z},\ v=\frac{ry}{r+z}.$$

由此可解出 x,y,z，即

$$x=\frac{2r^2u}{u^2+v^2+r^2},$$

$$y=\frac{2r^2v}{u^2+v^2+r^2},$$

$$z=\frac{r(r^2-u^2-v^2)}{u^2+v^2+r^2}.$$

由这些关系式推知性质(1)显然成立。如果(x,y,z)连续地变，则(u,v)也连续地变。反过来也一样。因此得出性质(2)。又，如果点P在S'上变动，则点(u,v)所描绘的图形是圆的内部：

$$u^2+v^2<3r^2,$$

由此得出(3′)。所以，我们在S'上引进了局部坐标系。

同样，可在S''上引进另一局部坐标系。设$P=(x,y,z)$是S''上的任一点，连接点P及北极$(0,0,r)$的直线交平面xOy于一点$(\bar{u},\bar{v},0)$，取$(\bar{u},\bar{v})$作为S''的点P的坐标。同理，可得(x,y,z)与$(\bar{u},\bar{v})$的关系式：

$$\bar{u}=\frac{rx}{r-z}, \quad \bar{v}=\frac{ry}{r-z}.$$

$$x=\frac{2r^2\bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+r^2},$$

$$y=\frac{2r^2\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+r^2},$$

$$z=\frac{r(\bar{u}^2+\bar{v}^2-r^2)}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+r^2}.$$

又当P在S''上变动时，点$(\bar{u},\bar{v})$所描绘的图形在圆的内部

$$\bar{u}^2+\bar{v}^2<3r^2.$$

这样，对于球面S^2的全体，虽然不单独存在一个坐标系，但是，对球面S^2的每一个局部S'及S''却存在坐标系，而S'称为局部坐标系(u,v)的坐标邻域，S''称为局部坐标系$(\bar{u},\bar{v})$的坐标邻域。

9.2.3 现在，进一步研究S'与S''的公共部分$D=S'\cap S''$。D的点$P(x,y,z)$具有两种局部坐标(u,v)及$(\bar{u},\bar{v})$，它们之间的关系又怎样呢？从前面各式容易推出：

$$\bar{u}=\frac{r^2u}{u^2+v^2}, \quad \bar{v}=\frac{r^2v}{u^2+v^2};$$

$$u=\frac{r^2\bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2},\quad v=\frac{r^2\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}.$$

对于D的任一点P，因为$u^2+v^2>0$，$\bar{u}^2+\bar{v}^2>0$，所以，$\bar{u}$，$\bar{v}$是u，v的函数，u，v是$\bar{u}$，$\bar{v}$的函数，而且有任意阶的连续导数。

§3 拓扑流形

9.3.1 有了上面的准备，我们来定义拓扑流形

定义 设M是一个拓扑空间，如果存在一整数m，使得M的每一点都有一基本邻域同胚于E^m的开子集，则M称为m维的拓扑流形。

在上述定义中，整数m是由拓扑空间M唯一确定的。因为由于内点与边界点的拓扑不变性(9.1.4)，如果$m\neq n$，则E^m与E^n的开集不可能同胚。故整数m是M的拓扑不变量，称为M的维数。

其次，如果$h:U\to E^m$是一个同胚映射，把x的基本邻域U映成E^m的一个开子集，则常常称(U,h)为M上的坐标系或流形M于点x的地图。而$h(x)\in E^m$则称为点x在坐标系(U,h)的局部坐标。坐标系(U,h)中的基本邻域U称为坐标邻域。

根据上述定义，欧几里得空间E^n也是拓扑流形，此时，只有一个坐标系(E^n,i)，i是恒等映射。又，上节中的球面S也是拓扑流形，此时有两个坐标系(S',p_1)及(S'',p_2)。此中p_1是以南极$(0,0,-r)$为中心，以xOy为投影面的中心投影映射；而p_2则是以北极$(0,0,r)$为中心，以平面xOy为投影面的中心投影映射。

9.3.2 现在将拓扑流形的概念推广到更广泛的情形。

设 E^m 是一 m 维欧氏空间，E^m 中满足条件 $x_m \geqslant 0$ 的子集 H^m 称为欧氏半空间．显然

$$E^{m-1} \subset H^m \subset E^m.$$

定义 设 M 是一个拓扑空间，如果存在一个整数 m，使得 M 的每一点都有一个开邻域同胚于 E^m 或 H^m 的开子集，则 M 称为拓扑流形．

如果 $h: U \longrightarrow H^m$ 是一个同胚映射，把 x 的一个开邻域 U 映成 H^m 的一个开子集 $h(U)$，并且 $h(x)$ 属于 E^{m-1}，则 x 称为 M 的边界点．所有边界点的集合称为 M 的边界，记为 M^b．如果 M^b 是空集，则称 M 为无边流形，否则称有边流形．

现在证明，拓扑流形的有边与无边，同坐标系的取法无关．为此，设

$$h_1: U_1 \longrightarrow H^m$$
$$h_2: U_2 \longrightarrow H^m$$

是两个同胚映射，分别把 x 的开邻域 U_1 与 U_2 映成 H^m 的开集．如果 $h_1(x) \in E^{m-1}$，则 $h_2(x)$ 也必属于 E^{m-1}．因为，假若不然，$h_2(x)$ 不属于 E^{m-1}，则同胚映射 $h_1 h_2^{-1}$ 把 E^m 中 $h_2(x)$ 的一个开集映成点 $h_1(x)$ 在 H^m 中的一个开邻域．但这个在 H^m 的开邻域显然不是 E^n 的开集．这就同区域不变性定理矛盾．]

9.3.3 由于拓扑流形是局部欧几里得化的拓扑空间，因此，欧几里得空间的许多性质可以通过一定的方式，用来研究拓扑流形．例如，我们来研究从拓扑流形 M 到拓扑流形 N 的连续映射的可微性问题．

设 M 是一 m 维流形，N 是一 n 维流形，F 是一从 M 的一开集到 N 的连续映射．于是，从映射 F 可得到从 E^m 的某一开集 U 到 E^n 的连续映射 f．研究 F 的可微性可归结

为研究 f 的可微性。如果 f 的分量函数 $f_1,\cdots,f_n$ 的直到 r 阶的偏导数都在 U 上连续，则称 f 属于类 C^r 可微的，或者说，f 属于类 C^r。以

$$a_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

为第 i 行第 j 列的元素所得的 (n,m) 矩阵称为 f 的 Jacobi 矩阵，记为 $Df(x)$ 或

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}.$$

设 M 的一点 p 属于坐标系 (U,h)，而 N 的点 $F(p)$ 属于坐标系 (V,k)。考虑连续映射

$$kFh^{-1}:h(U)\longrightarrow E^n.$$

Jacobi 矩阵 $D(kFh^{-1})$ 的秩称为 F 在 M 的点 p 的秩。

§4 微分流形

9.4.1 设 M 是一个 m 维拓扑流形。M 上的一个类 C^r 微分结构 $\mathscr{D}$，是指 M 的一组坐标系 (U,h) 的集合，满足下述三条件：

(1) 这组坐标系的坐标邻域的族能覆盖拓扑流形 M；

(2) 设 (U_1,h_1) 及 (U_2,h_2) 是这组坐标系中的任意两个坐标系，则

$$h_1h_2^{-1}:h_2(U_1\cap U_2)\longrightarrow E^m \text{ 或 } H^m$$
$$h_2h_1^{-1}:h_1(U_1\cap U_2)\longrightarrow E^n \text{ 或 } H^n$$

都是属于 C_r 可微的；

(3) 这组坐标系具有极大性质，即如果再向这组坐标系中添加一不属于该组的坐标系，则性质(2)不再成立。

9.4.2 设 M 是一个 m 维拓扑流形，$\mathscr{D}$ 是 M 上的一个

类 C^r 的微分结构，则$(M,\mathscr{D})$ 称为一个类 C^r 的 m 维微分流形。在不致混淆时，可以不提微分结构 $\mathscr{D}$，而称 M 是类 C^r 的微分流形。

显然，如果 M 是一个类 C^r 的微分流形，则 M 也是一个类 C^{r-1} 的微分流形。此时，如设 $\mathscr{D}$ 及 $\mathscr{D}_1$ 为 M 上的类 C^r 微分结构及类 C^{r-1} 微分结构，则 $\mathscr{D}\subset\mathscr{D}_1$。也就是说，$M$ 作为类 C^{r-1} 的微分流形的坐标系比作为类 C^{r-1} 的微分流形的坐标系更多一些。

9.4.3 设 M 是 m 维微分流形，N 是 n 维微分流形。并且都是至少属于类 C^r。命 $f:M\dashrightarrow N$ 是属于类 C^r 可微的。如果在 M 的每一点 p 处，f 的秩等于 m，则 f 称为一个浸入。如果 f 是把 M 映成 N 的同胚(自然，此时 $m=n$)，并且是浸入，则称它为一个微分同胚。

习　题

1．利用 S^{n-1} 的紧性证明，存在单形组 T，当 t 变化时 $(0\leqslant t\leqslant 1)$，$F_t$ 把 T 的每一单形仍映射为 S^{n-1} 的单形。

2．证明：如果 $m\neq n$，则欧氏空间 E^m 与 E^n 不同胚。m 称为 E^m 的维数或称 E^m 为 m维欧氏空间。

3．证明：固定点定理：从

$$B^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant r^2\}$$

到它本身的连续映射 f 必有不动点，即存在 $x\in B^n$，使 $f(x)=x$。

参 考 书 目

[1] W. Hurewicz & H. Waliman, Dimension Theory, Princeton University Press, Princeton, 1948.

[2] W. Sierpinski, General Topology, Toronto University Press, Toronto, 1952.

[3] D. W. Hall & G. L. Spencer Ⅱ, Elementary Topology, John Wiley, New York, 1955.

[4] J. L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1955.

[5] Kurt Gödel, The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axiom of Set Theory, 1st printing, 1940, 4th printing, Princeton, 1958.

[6] P. R. Halmos, Naive Set Theory, Van Nostrand. New York, 1960.

[7] F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin: Watter de Hruyter, 1935 (张义良,颜家驹译，集论，科学出版社，1960).

[8] J. G. Hocking & G. S. Young, Topology, Addison-Wesley Publishing Co. London, 1961.

[9] 岩堀长庆, Lie 群论，岩波书店，东京，1957 (孙泽瀛译，李群论，上海科学技术出版社，1962).

[10] J. R. Munkres, Elementary Differential Topology, Princeton University Press, Princeton, 1963 (李培信译，初等微分拓扑学，上海科学技术出版社，1966).

[11] W. J. Pervin, Foundations of General Topology, Academic Press, New York, 1964.

[12] H. J. Kowalsky, Topological Spaces, Academic Press, New York, 1964.

[13] 江泽涵，拓扑学引论，上海科学技术出版社，1964，1978.

[14] S. A. Gaal, Point Set Topology, Academic Press, New York, 1964.

[15] E. Čech, Topological Spaces, Academia, Prague, 1966.